

综合提高实战练习题 (一)

1 下列结论中错误的是 ()

- (A) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 1$, 则存在 $M > 1$, 当 n 充分大时, $a_n > M$;
(B) 设 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则当 n 充分大时, $a_n < b_n$;
(C) 设 $M \leq a_n \leq N (n = 1, 2, \dots)$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则, $M \leq a \leq N$;
(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$, 则当 n 充分大时, $a_n > a - \frac{1}{n}$

2. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$; 则必有: ()

- A. $a_n < b_n$ 对任意 n 成立; B. $b_n < c_n$ 对任意 n 成立;
C. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在; D. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在;

3 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$, 则正确的结论是 ()

- (A) 若 $\{a_n\}$ 发散, $\{b_n\}$ 也发散; (B) 若 $\{a_n\}$ 无界, 则 $\{b_n\}$ 也无界;
(C) 若 $\{a_n\}$ 有界, 则 $\{b_n\}$ 必为无穷小; (D) 若 $\frac{1}{a_n}$ 为无穷小, 则 b_n 必为无穷小;

4, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln x \cdot \ln(1-x)} = ()$

5, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\sin x} - 1}{x^3} = 6$, 问 $a = ?$

6, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} [\ln \frac{1}{n} + 2\ln \frac{2}{n} + \dots + (n-1)\ln \frac{n-1}{n}] = ()$

7, 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{x^{-4}}$

8, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [x^2 - 3\sin(x-t)^2] dt}{(e^x - 1)(1 - \cos x)^3}$

9, 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - x]$

10, 求 $y = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线

11, 设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$, $g(x) = kx^3$

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 的值?

12. 若极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(e^x - a)} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$

13. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{1cm}}$

14. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 比较下列无穷小量的大小:

$$a(x) = \int_0^x \cos t^2 dt, \quad b(x) = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt, \quad c(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶次是 ()

(A) $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$ (B) $\int_0^x \ln(1+t) dt$ (C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$ (D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

15 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶次是 ()

(A) $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$ (B) $\int_0^x \ln(1+t) dt$ (C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$ (D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

16 设 $f(x) = \frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第几类间断点?

17, 设函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2-1} e^{\frac{1}{x-2}}$, 问函数有几个间断点以及其类型?

18 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 非负, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 求证, 存在 $\xi \in [0,1]$, 使得 $f(\xi+a)=f(a)$, 其中 $0 < a < 1$.

19: 若 $f'(x)$ 在有限区间 I 上有界, 则 $f(x)$ 在 I 上也有界; (导数有界则函数有界)

20 函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导的充分必要条件是()?

A $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$ 存在; B $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+\ln(1+2h^2)) - f(1)}{e^{h^2}-1}$ 存在

C $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-\cosh h) - f(1)}{h}$ 存在; D $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e^h) - f(1)}{h}$ 存在

21. $f(x) = \begin{cases} x^2(1 + \sin \frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 问 (a) $f(x)$ 在 0 点是否连续? (b) 是否可导?

22 函数 $f(x) = \sin(x-2)\sin(x-4)|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4|$ 不可导点的个数?

23 已知 $f(x)$ 连续

且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 求证 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 连续

24, 设函数在区间 $[-2, 2]$ 上可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$, 则 ()

A $\frac{f(-2)}{f(-1)} > 1$; B $\frac{f(0)}{f(-1)} > e$; C $\frac{f(1)}{f(-1)} < e^2$; D $\frac{f(2)}{f(-1)} < e^3$

25 :函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内连续, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界

26. 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n})$

27 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}]$

28 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$; 验证数列 $\{x_n\}$ 是否有极限, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

29 设 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = 3 + \frac{4}{x_n}$, 验证数列 $\{x_n\}$ 极限是否存在, 并求之。

30 设 $x_1 = \sqrt{6}$, $x_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots \sqrt{6}}}}$, 数列 $\{x_n\}$ 是否有极限? 并求其极限。

31 设 $A_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$; 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{4} - A_n \right)$