

# 综合提高解析

经纬考研

## 综合提高练习题解析：（第一部分）

1 下列结论中错误的是（ ）

(A) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 1$ , 则存在  $M > 1$ , 当  $n$  充分大时,  $a_n > M$ ;

(B) 设  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 则当  $n$  充分大时,  $a_n < b_n$ ;

(C) 设  $M \leq a_n \leq N (n = 1, 2, \dots)$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则,  $M \leq a \leq N$ ;

(D) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$ , 则当  $n$  充分大时,  $a_n > a - \frac{1}{n}$

解：（解析）对A, 取  $M = \frac{a+1}{2}$ , 则  $M > 1$ , 令  $x_n = a_n - M$ ,

则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - M) = a - \frac{a+1}{2} = \frac{a-1}{2} > 0$ ; 由极限的保号性, 当  $n$  充分大时有  $x_n > 0$ , 即  $a_n > M$

对B, 令  $x_n = a_n - b_n$ ;

对C, 令  $x_n = N - a_n$ ; 则  $x_n \geq 0$ , 由保号性  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$ , 所以  $N - a \geq 0$ ;

对D, 取  $a_n = a - \frac{2}{n}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$ , 但显然  $a - \frac{2}{n} < a - \frac{1}{n}$ ; 所以错误。

注：本题对理解保号性很有帮助；数列的保号性，当  $n > N$  时， $a_n$  的符号与极限符号一致，与前  $(N)$  有限项无。这也是数列极限定义所隐喻的。

2, 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列,

且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ ; 则必有:

- A.  $a_n < b_n$  对任意  $n$  成立;                      B.  $b_n < c_n$  对任意  $n$  成立;
- C. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$  不存在;                      D. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$  不存在;

解析: 属于考察极限定义与性质的题目。

A, B 选项的“对任意  $n$  成立”直接与定义不符; 数列极限时当  $n$  趋于无穷时的趋势, 数学语言就是: 存在某个正整数  $N$ , 当  $n > N$  时的结论, 与前有限项的数值变化无关。C 选项说的时一个无穷小与一个无穷大的乘积, 属于未定型, 可能存在, 也可能不存在; (很容易举出反例); 只有 D 正确! D 可以看成时一个有界极限与无穷之积, 因此还是无穷大, 或者极限不存在

3 设数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ , 则正确的结论是 ( )

(A) 若  $\{a_n\}$  发散,  $\{b_n\}$  也发散;

(B) 若  $\{a_n\}$  无界, 则  $\{b_n\}$  也无界;

(C) 若  $\{a_n\}$  有界, 则  $\{b_n\}$  必为无穷小; (D) 若  $\frac{1}{a_n}$  为无穷小, 则  $b_n$  必为无穷小;

解析: 很容易知道A, B 是错误

(C)  $\{a_n\}$  有界, 也可以极限为0, 所以不一定要要求  $\{b_n\}$  必为无穷小;

(D)  $b_n = (a_n b_n) \frac{1}{a_n}$  两个无穷小之积因此 D 正确!

4,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{(1+x)^x - 1}$

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{(1+x)^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{e^{x \ln(1+x)} - 1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{x^2} = (\text{洛必达两次}) = 1$$

注: 1, 幂指函数求极限的时候尽量利用  $e^{\ln(\cdot)}$  来处理。 2. 及时利用等价代换化简因子式。

$$5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\sin x} - 1}{x^3} = 6 \text{ 问 } a = ?$$

$$\text{解: } = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x \ln(1+ax^2)} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \ln(1+ax^2)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2}{x^2} = a = 6$$

注:  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $e^{f(x)} - 1$  等价于  $f(x)$ ,  $\ln(1 + f(x))$  等价于  $f(x)$

$$6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} [\ln \frac{1}{n} + 2 \ln \frac{2}{n} + \dots + (n-1) \ln \frac{n-1}{n}] = ?$$

解析: 属于利用定积分求极限部分, 也可以算作定积分 (元素法) 的应用

简化的定义一般分割为  $n$  等份,  $\Delta A_i = \frac{1}{n} f(\frac{i}{n})$

$$\text{解: } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \ln \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \ln \frac{n-1}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left( \frac{i}{n} \ln \frac{i}{n} \right) = \int_0^1 x \ln x dx$$

$$= \frac{1}{2} [x^2 \ln x]_0^1 - \int_0^1 x dx = -\frac{1}{4}.$$

注: 收敛的瑕积分。

$$7: \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{x^{-4}}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x + 2x \sin x)}{x^4}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 x + 2x \sin x)}{x^4}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 x + 2x \sin x}{x^4}} = e^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{or. } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{x^{-4}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2\sin^2 x + 2x \sin x)^{x^{-4}},$$

$$\alpha(x) = -2\sin^2 x + 2x \sin x, \quad \beta(x) = x^{-4},$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \beta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 x + 2x \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin x}{x^3} + \frac{2x}{x^3} = \frac{1}{3};$$

$$\text{所以: } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{x^{-4}} = e^{\frac{1}{3}}$$

$$8 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [x^2 - 3\sin(x-t)^2] dt}{(e^x - 1)(1 - \cos x)^3} \quad \text{----- (积分上限函数的求导问题)}$$

解: 第一步: 等价化简:

$$(e^x - 1) \text{ 等价于 } x, \quad (1 - \cos x)^3 \text{ 等价于 } \frac{x^6}{8}$$

$$\text{分子中 } \int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \int_x^0 \sin u^2 d(-u) = \int_0^x \sin u^2 du \quad (\text{设 } x-t=u)$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} 8 \cdot \frac{x^3 - 3 \int_0^x \sin u^2 du}{x^7} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 3\sin x^2}{7x^6} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 3[x^2 - \frac{1}{6}x^6]}{7x^6} = \frac{4}{7}$$

9 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - x]$

解：（法一：泰勒展开）原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})) - x]$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + o(1) = -\frac{1}{2}$$

（法二）设  $\frac{1}{x} = y$ , 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} [\frac{1}{y^2} \ln(1 + y) - \frac{1}{y}] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y) - y}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+y} - 1}{2y}$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1+y} \frac{-y}{2y} = -\frac{1}{2}$$

注：适时利用变量代换

10, 求  $y = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$  的渐近线

解：  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 1)e^{\frac{1}{x}} = \infty$  ---- 无水平渐近线；

$\lim_{x \rightarrow +0+} (2x - 1)e^{\frac{1}{x}} = -\infty$  ----  $x=0$  是垂直渐近线

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 2 = k;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [(2x - 1)e^{\frac{1}{x}} - 2x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [2x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - e^{\frac{1}{x}}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} - 1 = 1$$

斜渐近线：  $y = 2x + 1$

11 设函数  $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$ ,  $g(x) = kx^3$

若  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x \rightarrow 0$  时是等价无穷小, 求  $a, b, k$  的值?

解析: 利用泰勒展开, 对比对应项即可

$$f(x) = x + a \left[ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right] + bx \left[ x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right], \text{ 化简, 与 } g(x) = kx^3 \text{ 比较同类项,}$$

$$\text{可得: } a = -1, b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{3}$$

12 若极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(e^x - a)} (\cos x - b) = 5$ , 则  $a = \underline{\quad}$ ,  $b = \underline{\quad}$

解: 由于分子极限为零, 则分母极限也必须为零:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) = 0, \text{ 可得 } a = 1;$$

$$\text{于是原式等于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(e^x - 1)} (\cos x - b) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} (\cos x - b) = 1 - b = 5, \text{ 则 } b = -4.$$

13 已知函数  $f(x)$  满足  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

解: 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - 1) = 0$ ; 所以 必须:  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1) = 0$ ;

即:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)\sin 2x = 0$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\sin 2x}{(e^{3x}-1)(\sqrt{1+f(x)\sin 2x}+1)} \quad (\text{非零极限先求出})$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\sin 2x}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2; \quad \text{所以答案为 } 6;$$

或者利用等价代换:  $\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1 = \frac{f(x)\sin 2x}{2}$ .

14 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 比较下列无穷小量的大小:

$$a(x) = \int_0^x \cos t^2 dt, \quad b(x) = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt, \quad c(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$$

提示: 类似积分上限函数无穷小问题, 先求导, 观察无穷小的阶次;

(也即求导不改变无穷小的关系: )

$$a'(x) = \cos x^2, \quad (\text{有界}), \quad b'(x) = 2x \tan x \quad \text{---(二阶)}; \quad c'(x) = \frac{\sin x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} \quad \text{---(一阶)}$$

所以  $a < c < b$

15当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶次是 ( )

(A)  $\int_0^x (e^{t^2} - 1)dt$  (B)  $\int_0^x \ln(1+t)dt$  (C)  $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$  (D)  $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

解: A:  $e^{t^2} - 1 \sim t^2$ ,  $\int_0^x (e^{t^2} - 1)dt \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$  ;

B:  $\ln(1 + \sqrt{t^3}) \sim t^{\frac{3}{2}}$  得  $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3})dt \sim \int_0^x t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$ ;

C:  $\sin t^2 \sim t^2$ ,  $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$

D:  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ,  $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt \sim \int_0^{\frac{x^2}{2}} t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{10\sqrt{2}} x^5$

16设  $f(x) = \frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}$ , 则  $x=0$  是  $f(x)$  的第几类间断点?

解:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ ;

所以是第一类间断点 (跳跃间断点)

17 设函数  $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2-1} e^{\frac{1}{x-2}}$  , 问函数有几个间断点以及其类型?

解: 显然,  $x$  趋于 0,  $x$  趋于 2 时, 函数值都趋向于无穷大, 所以都是第二类间断点;

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln|x|}{x^2-1} e^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{(t-1)(t+1)} e^{\frac{1}{t-2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{3}}; \text{----可去间断点};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln|x|}{x^2-1} e^{\frac{1}{x-2}} = \frac{1}{2} e^{-1} \text{ ---- 可去间断点.}$$

18 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 非负, 且  $f(0) = f(1) = 0$ , 求证, 存在  $\xi \in [0,1]$ , 使得

$f(\xi+a) = f(\xi)$ , 其中  $0 < a < 1$ .

证明: 分析: 证明类似含有不确定量的等式或者不等式, 多数先利用辅助函数

设  $F(x) = f(x+a) - f(x)$ ,  $x \in [0, 1-a]$ , 则有

$$F(0) = f(a) - f(0) = f(a) \geq 0; F(1-a) = f(1) - f(1-a) \leq 0;$$

若上面等号有一个成立, 则结论自然成立; 否则, 由零点定理, 必存在  $\xi \in (0, 1-a)$ ,

使得  $F(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi+a) = f(\xi)$ .

**提示:** 介于区间  $[a,b]$  之间的点可以表示为:  $\lambda a + (1-\lambda)b$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . ( $\lambda = 1/2$  时即为中点)

注: 闭区间连续函数的性质经常用在证明题里。

19: 若 $f'(x)$ 在有限区间 $I$ 上有界, 则 $f(x)$ 在 $I$ 上也有界; (导数有界则函数有界)

证: 任取区间 $I$ 上一点 $x_0$ , 则 $f(x_0)$ 有界;  $f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0)$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| = |f'(\xi)||x - x_0| + |f(x_0)|,$$

式子的三项都在有限区间 $I$ 上有界, 所以 $f(x)$ 有界。

注: 有限区间是必须条件。

20 函数  $f(x)$  在  $x = 1$  处可导的充分必要条件是( )?

A  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$  存在; B  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+\ln(1+2h^2)) - f(1)}{e^{h^2}-1}$  存在

C  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-\cosh h) - f(1)}{h}$  存在 ; D  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e^h) - f(1)}{h}$  存在

解析: (严格对照定义): A 不正确, 因为  $f(1)$  可能不存在;

B的分子自变量之差相当于  $2h^2$ , 为非负变量;

C的分子自变量之差相当于  $h^2/2$ ; 所以 答案为 D.

**知识点:** 当 $f(x)$ 在 $x_0$ 可导时, 可以推出:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+a\Delta x) - f(x_0+b\Delta x)}{\Delta x} = (a-b)f'(x_0),$

但反之不一定! (因为 $f(x)$ 在 $x_0$ 有可能**没定义**) (所以A选项不准确)

21.  $f(x) = \begin{cases} x^2(1 + \sin \frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  问 (a)  $f(x)$  在 0 点是否连续? (b) 是否可导?

解: (a) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2(1 + \sin \frac{1}{x}) = 0 = f(0)$ ;

所以在 0 点连续!

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \sin \frac{1}{x})}{x} = 0$ , 所以在 0 点可导。导数为 0.

22 函数  $f(x) = \sin(x-2)\sin(x-4)|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4|$  不可导的个数?

**结论:**  $f(x) = g(x)|x-a|$ , 其中  $g(x)$  在  $x = a$  处连续,  $f(x)$  在  $x = a$  处可导的

充分必要条件是  $g(a) = 0$ . (自己证明下)

23 已知 $f(x)$ 连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ,  $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$ , 求证  $g'(x)$  在  $x = 0$  连续

证:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ,  $\gg \gg f(0) = 0; f'(0) = 1$  --- (解析条件)

$$g(0)=0; g(x) = \int_0^1 f(xt)dt = \frac{\int_0^x f(u)du}{x} \quad (xt = u) \text{---(简化变换)}$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2};$$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{x^2} [xf(x) - \int_0^x f(u)du] & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} [xf(x) - \int_0^x f(u)du] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{--- (连续的定义)}$$

由此得证  $g'(x)$  在 0 点连续。

24, 设函数在区间 $[-2,2]$ 上可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$ , 则 ( )

$$A \frac{f(-2)}{f(-1)} > 1; \quad B \frac{f(0)}{f(-1)} > e; \quad C \frac{f(1)}{f(-1)} < e^2; \quad D \frac{f(2)}{f(-1)} < e^3$$

解：法一（辅助函数）：把不等式变形： $f'(x) - f(x) > 0$ ；作辅助函数： $F(x) = e^{-x}f(x)$

则有  $F'(x) = e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) > 0$ ；所以  $F(x)$  在 $[-2,2]$ 上单增；

代入验证： $F(-2) < F(-1)$ , 即 $e^2f(-2) < ef(-1)$ , A不正确；

$F(0) > F(-1)$ ,  $f(0) > ef(-1)$ , 所以 B 正确

法二：变形式子为： $\frac{f'(x)}{f(x)} > 1$ ,  $[\ln(f(x) - x)]' > 0$ , 所以  $[\ln(f(x) - x)]$  在给定的区间上时递增的；

代入 -2, -1, 0 等数值验证即可。

注：由于对函数没有要求，意味着对任意满足条件的函数都成立，所以可以选取特殊的函数试错法验证。

25 :函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内连续,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 证明 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界

证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 可得存在  $X > 0$ , 当  $x > X$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$  则

将区间  $[a, +\infty)$  分成  $[a, X]$ , 以及  $[X, +\infty)$ , 在前一个区间, 利用闭区间连续函数的有界性, 后一区间  $|f(x)| < |A| + \varepsilon$ ; 都有界, 得证!

26. 求极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n})$

解: 因为  $n \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \leq n \cdot \frac{n}{n^2+n};$

又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$ ; 则由夹逼准则, 所求极限为 1.

27 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}]$

$$\text{解: } \frac{1}{n+1} (\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots \sin \frac{n\pi}{n}) \leq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n+\frac{1}{n}} (\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots \sin \frac{n\pi}{n})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} (\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots \sin \frac{n\pi}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} (\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots \sin \frac{n\pi}{n}) =$$

$$= \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi} ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} (\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots \sin \frac{n\pi}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} \frac{1}{n} (\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots \sin \frac{n\pi}{n}) = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}$$

由夹逼准则，原极限值为  $\frac{2}{\pi}$ 。

28 设  $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ ; 验证数列  $\{x_n\}$  是否有极限, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

解: 有界性:  $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \geq 2(\sqrt{\frac{x_n}{2}} \sqrt{\frac{1}{x_n}}) = \sqrt{2}$  ( $a^2 + b^2 \geq 2ab$  这个不等式最常用! )

单调性:  $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n} - \frac{x_n}{2} = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} \leq 0$ , 所以 数列  $\{x_n\}$  单调减少有下界, 因此有极限。

对通项式子两边取极限, 可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$ 。

**29** 设  $x_1 > 0$ ,  $x_{n+1} = 3 + \frac{4}{x_n}$ , 验证数列  $\{x_n\}$  极限是否存在, 并求之。

解: 解析: 记  $x_{n+1} = f(x_n)$ , 则  $f(x) = 3 + \frac{4}{x}$ ,

由于  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ , 所以数列  $\{x_n\}$  不是单调数列! (为什么?) 不能用单调有界法则。

(记住下面这个方法!) 先假定极限存在, 由通项式子求出其极限为 4 (说明数列在 4 上下波动)

再验证数列的下界: 显然  $x_{n+1} = 3 + \frac{4}{x_n} > 3$ ;

$$\text{由 } 0 < |x_{n+1} - 4| = |3 + \frac{4}{x_n} - 4| = |\frac{4-x_n}{x_n}| < \frac{1}{3}|x_n - 4| < \frac{1}{3^2}|x_{n-1} - 4| < \dots < \frac{1}{3^{n-1}}|x_2 - 4|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n-1}}|x_2 - 4| = 0, \text{ 所以 由夹逼准则, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$$

**技巧点:** 设数列  $\{x_n\}$  由  $x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots), x_n \in I$  所确定,

1) 若函数  $f(x)$  在  $I$  上单调增, 则当  $x_1 \leq x_2$  时,  $\{x_n\}$  也单调增; 当  $x_1 \geq x_2$  时,  $\{x_n\}$  单调减;

2) 若函数  $f(x)$  在  $I$  上单调减, 则数列  $\{x_n\}$  不单调! 非单调数列一般要用夹逼准则。

30 设  $x_1 = \sqrt{6}$ ,  $x_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots \sqrt{6}}}}$ , 数列  $\{x_n\}$  是否有极限? 并求其极限。

解: 首先写出数列的通项式子:  $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$

(I) 判定是否有界: (利用归纳法, 分三步)

1) 已知  $x_1 = \sqrt{6} < 3$ , (为什么选 3? 一个小技巧: 利用上面的通项式子先求一下极限)

2) 对任给的  $k > 1$ , 假设  $x_k < 3$ , (利用这个条件, 验证  $x_{k+1} < 3$ ;) )

3)  $x_{k+1} = \sqrt{6 + x_k} < \sqrt{6 + 3} = 3$ , 所以, 由数学归纳法,  $x_n < 3$ ;

(ii) 验证单调性:  $x_{n+1} - x_n = \sqrt{6 + x_n} - x_n = \frac{6 + x_n - x_n^2}{\sqrt{6 + x_n} + x_n} = \frac{(2 + x_n)(3 - x_n)}{\sqrt{6 + x_n} + x_n} > 0$ ;

所以  $\{x_n\}$  单调增加, 有上界, 因此有极限。

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ; 对通项两边取极限可得  $a = \sqrt{6 + a}$ , 求得  $a = 3$ .

31 设  $A_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$ ; 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{\pi}{4} - A_n)$

解:  $A_n = \frac{1}{n}(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2})$

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{1+(\frac{n-1}{n})^2}) \quad (\text{取小区间的左端点})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{\pi}{4} - A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n[\frac{1}{n}(1 - \frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2})] = \frac{1}{2}$$

反向利用定积分定义（元素法）的题目