

经纬研选练习题 (二)

经纬考研数学

www.jingweimath.com

1 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + xf(x)}{x^2} = 0$. 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+f(x)}{x} = ()$

2 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{a \ln(1+x)} e^{-t^2} dt$ ($a > 0$) 在点(0,0)处切线相同, 已知极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[3]{f\left(\frac{a}{n^3}\right)} = 4, \text{ 求常数 } a?$$

3 设 $f(x)$ 在 x_0 可导, 求极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0}$

4 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 连续, $(0,3)$ 内二阶可导; 且 $2f(0) = \int_0^2 f(x)dx = f(2) + f(3)$

证明 1) 存在 $\eta \in (0,2)$, 使得 $f(0) = f(\eta)$;

2) 存在 $\xi \in (0,3)$ 使得 $f''(\xi) = 0$

5 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, $f(a) = b, f(b) = a, ab > 0$;

求证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{-f(\xi)}{\xi}$.

6 设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, $(1, 2)$ 内可导, 且 $f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = 2$,

求证 存在 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$

7 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 连续, $(0, \pi)$ 可导, 求证存在 $\xi \in (0, \pi)$ 使得

$$f'(\xi)\sin\xi + 2f(\xi)\cos\xi = 0$$

8 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$;

求证: (1) 存在 $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f(\xi) = \xi$;

(2) 对任意实数 α , 存在 $\eta \in (0, \xi)$, 使得 $f'(\eta) - \alpha[f(\eta) - \eta] = 1$

9 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(-1) = -1$; 求证:

1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

2) 存在 $\eta \in (-1,1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$

10 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$

求证 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $\int_0^\xi f(x)dx = -\xi f(\xi)$

11 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 ($a > 0$), (a, b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$$

12 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 上可导, $f(0) = 0, f(1) = 1$,

证明 1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$

2) 存在不同的两点 $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta_1)f'(\eta_2) = 1$

13 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

14 证明: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二阶连续可导, 则至少存在一点

$$\xi \in (a,b), \text{ 使得 } f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi)$$

www.jingweimath.com

15 设 $f(x)$ 二阶可导, $f'(0) = f'(1), |f''(x)| \leq 1$;

求证 (1) $x \in (0,1)$ 时, $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$;

(2) $|\int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2}| \leq \frac{1}{12}$.

16 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处 ()

(A) 连续且取极大值;

(B) 连续且取极小值

(C) 可导且导数为 0;

(D) 可导且导数不为 0;

17 证明不等式: 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$

18 证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} \quad (-1 < x < 1)$

19 当 $x > 0$ 时, 方程 $\frac{1}{2x^2} + kx = 1$ 有且仅有一个实根, 求 k 的取值范围?

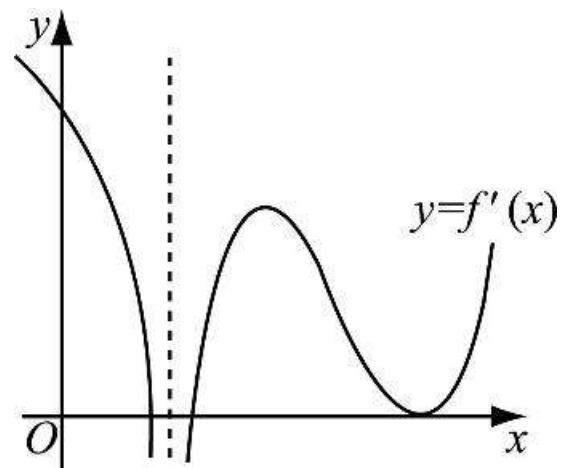
20 (设函数 $f(x) = ax - b \ln x \quad (a > 0)$ 有两个零点, 则 $\frac{b}{a}$ 满足
(A) $(e, +\infty)$ (B) $(0, e)$ (C) $(0, \frac{1}{e})$ (D) $(\frac{1}{e}, +\infty)$)

21 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间和极值。

www.jingweimath.com

22 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数 $f'(x)$ 的图形如图所示, 则 ()

- (A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点
- (B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点
- (C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点
- (D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点



23 证明对非负实数 a, b 有 $2a \tan(\frac{a+b}{2}) \geq a \tan a + \tan b$

24 曲线 $y = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$ 有几条渐近线?

25 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 则在点 $x = 0$ 处 $f(x)$ ()

- (A) 不可导; (B) 可导, 且 $f'(0) \neq 0$; (C) 取得极大值; (D) 取得极小值

26 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则 ()

- (A) $f(0)$ 是极大值; (B) $f(0)$ 是极小值; (C) $(0, f(0))$ 是拐点; (D) 上面都不对

27 设 $f(x) = |x(1 - x)|$, 则 ()

- (A) $x=0$ 是函数的极值点, 但 $(0,0)$ 不是曲线的拐点;
(B) $x=0$ 不是函数的极值点, 但 $(0,0)$ 是曲线的拐点;
(C) $x=0$ 是函数的极值点, 且 $(0,0)$ 是曲线的拐点;
(D) $x=0$ 不是函数的极值点, $(0,0)$ 也不是曲线的拐点;

28 设函数 $y = f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + f''(x)}{\ln(1+x)} = 1$, 判断点 $(0, f(0))$ 是否为曲线的拐点?

29 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续且单调增加, 证明 $\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$

30 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (1) 在 $x=0$ 点是否可导;

(2) 是否存在 $x=0$ 的一个邻域, 使 $f(x)$ 在该邻域单调?

30 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (1) 在 $x=0$ 点是否可导;

(2) 是否存在 $x=0$ 的一个邻域, 使 $f(x)$ 在该邻域单调?

经纬考研数学 www.jingweimath.com