

经纬研选练习(二)

经纬考研数学

www.jingweimath.com

1 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + xf(x)}{x^2} = 0$. 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+f(x)}{x} = ()$

解法1: 分析: 分子是 $o(x^2)$ (利用同类展开) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + xf(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 + xf(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + xf(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + f(x) + \frac{x}{2} + o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + f(x)}{x} + \frac{1}{2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + f(x)}{x} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

解法2: 解出 $f(x)$ 的表达式: $e^x - 1 + xf(x) = o(x^2)$

$$f(x) = \frac{1 - e^x + o(x^2)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - e^x + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

2 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{a \ln(1+x)} e^{-t^2} dt$ ($a > 0$) 在点(0,0)处切线相同, 已知极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[3]{f\left(\frac{a}{n^3}\right)} = 4, \text{ 求常数 } a?$$

解: 由题意 $f(0) = 0$, $f'(0) = \frac{a}{1+x} e^{-a^2 \ln^2(1+x)} \Big|_{x=0} = a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[3]{f\left(\frac{a}{n^3}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{f\left(\frac{a}{n^3}\right)}{\frac{a}{n^3}}} \cdot a = \sqrt[3]{af'(0)} = \sqrt[3]{a^2} = 4, \quad a = 8$$

3 设 $f(x)$ 在 x_0 可导, 求极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0}$

解: 错误做法: 原式用洛必达

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) - x_0f'(x)) = f(x_0) - x_0f'(x_0)$$

因为: 没有 $f'(x)$ 连续这个条件, 推不出 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$

利用定义: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x_0) + x_0f(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = f(x_0) - x_0f'(x_0)$$

4 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 连续, $(0,3)$ 内二阶可导; 且 $2f(0) = \int_0^2 f(x)dx = f(2) + f(3)$

证明 1) 存在 $\eta \in (0,2)$, 使得 $f(0) = f(\eta)$;

2) 存在 $\xi \in (0,3)$ 使得 $f''(\xi) = 0$

证明: 1) 由积分中值定理: $\int_0^2 f(x)dx = 2f(\eta)$, $\eta \in (0,2)$, 所以 $f(0) = f(\eta)$;

2) 由罗尔定理, 必存在 $\xi_1 \in (0,2)$ 使得 $f'(\xi_1) = \frac{f(\eta) - f(0)}{\eta - 0} = 0$; ----- (1)

由介值定理, 必存在 $\xi_3 \in (2,3)$, 使得 $f(\xi_3) = \frac{f(2) + f(3)}{2} = f(\eta)$;

再由罗尔定理, 必存在 $\xi_4 \in (\eta, \xi_3)$, 使得 $f'(\xi_4) = \frac{f(\eta) - f(\xi_3)}{\eta - \xi_3} = 0$; ---- (2)

再由罗尔定理, 必存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_4)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{f'(\xi_4) - f'(\xi_1)}{\xi_4 - \xi_1} = 0$, 得证!

5 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, $f(a) = b, f(b) = a, ab > 0$;

求证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.

证明: 先变形, 找等价关系 >>> 即证 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$; (此类问题基本上利用辅助函数)

还原法: 要使得 $xf'(x) + f(x) = 0$ 即 $[xf(x)]' = 0$; 所以 设 $F(x) = xf(x)$,

则有: $F(a) = af(a) = ab; F(b) = bf(b) = ab$;

由罗尔定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即证结论。

经纬考研数学 www.jingweimath.com

6 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续, $(1,2)$ 内可导, 且 $f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = 2$,

求证 存在 $\xi \in (1,2)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$

证明: 变形化简: 要证 $\xi f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$; 还原法:

即需要 $xf'(x) - 2f(x) = 0 \gg \gg \left[\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{2}{x}\right]' = 0 \gg \gg \left[\ln \frac{f(x)}{x^2}\right]' = 0 \gg \gg$

设辅助函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}; F(1) = f(1) = \frac{1}{2}; F(2) = \frac{f(2)}{4} = \frac{1}{2};$

存在 $\xi \in (1,2)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $\frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} \Big|_{x=\xi} = 0$; 化简记得结论。

7 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 连续, $(0, \pi)$ 可导, 求证存在 $\xi \in (0, \pi)$ 使得

$$f'(\xi)\sin\xi + 2f(\xi)\cos\xi = 0$$

证明: 解析: 辅助函数: $F(x) = e^{\int g(x)dx} f(x) = e^{2 \int \frac{\cos x}{\sin x} dx} f(x) \sin^2 x$

8 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$;

求证: (1) 存在 $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f(\xi) = \xi$;

(2) 对任意实数 α , 存在 $\eta \in (0, \xi)$, 使得 $f'(\eta) - \alpha[f(\eta) - \eta] = 1$

证明: (1) 设 $g(x) = f(x) - x$; $g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$; $g(1) = 0 - 1 < 0$;

由(闭区间连续函数) 零点定理知, 存在 $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$ 使得 $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$.

(2) 解析辅助函数 $f'(\eta) - \alpha[f(\eta) - \eta] = 1 \gg \gg [f(x) - x]' - \alpha[f(x) - x] = 0 \gg \gg$

设 $F(x) = e^{-\alpha x}[f(x) - x]$; $F(0) = 0, F(\xi) = 0$;

由罗尔定理, 存在 $\eta \in (0, \xi)$, 使得 $F'(\eta) = 0$, 即证结论。

注: 第二问中用到了第一问的 ξ 是个“线索”。

9 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(-1) = -1$; 求证:

1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

2) 存在 $\eta \in (-1,1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$

证明: (1) $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(0) = 0$, 又 $f(1) = -f(-1) = 1$; 由拉格朗日中值定理:

$f(1) - f(0) = f'(\xi), \xi \in (0,1)$ 所以 1) 得证。

(2) 解析: 对结论2) 含二阶导数, 可尝试一阶导数作为函数 $\gg [f'(\eta) - 1]' + [f'(\eta) - 1] = 0$

所以可做辅助函数 $F(x) = e^x[f'(x) - 1] \dots\dots$

因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f'(x)$ 是偶函数, $f'(-\xi) = f'(\xi) = 1, \gg F'(-\xi) = F'(\xi)$

由罗尔定理, 存在 $\eta \in (-\xi, \xi)$, 使得 $F'(\eta) = 0$, 即可证明结论。

或者 (法二): 直接观察: $f''(\eta) + f'(\eta) - 1 = 0$, $\gg$ 可考虑辅助函数:

$F(x) = f'(x) + f(x) - x$; 由 $f(x)$ 是奇函数, $f'(x)$ 是偶函数, $F(-1) = F(1) = 0$

由罗尔定理即可证明结论!

10 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$

求证 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $\int_0^\xi f(x)dx = -\xi f(\xi)$

证明: 解析 先变形, 结论等价于 $\int_0^\xi f(x)dx + \xi f(\xi) = 0$ 辅助函数, 设 $g(x) = \int_0^x f(x)dx$

则相对于 $g(x) + xg'(x) = 0$, 可令 $F(x) = x \int_0^x f(x)dx$

利用罗尔定理, 即可证得结论

----柯西**中值**定理的应用: 含有一个中值点 ξ , 可以分离成分子分母函数形式.

11 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 ($a>0$), (a, b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$$

证明: 解析: 先整理: 原式相当于 $\frac{f(b)-f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{1/\xi}$; 所以设 $g(x) = \ln x$,

由柯西中值定理直接可证得结论: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{1/\xi}$

12 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 上可导, $f(0) = 0, f(1) = 1$,

证明 1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$

2) 存在不同的两点 $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta_1)f'(\eta_2) = 1$

证: 1) 设 $F(x) = f(x) + x - 1$; $F(0) = -1, F(1) = 1$, 由零点定理, 存在 $\xi \in (0,1)$, $F(\xi) = 0$, 证得 1)。

2) 在 $(0, \xi)$ 区间利用拉格朗日定理: $f(\xi) - f(0) = f'(\eta_1)\xi$, $\eta_1 \in (0, \xi)$; 得 $f'(\eta_1) = (1 - \xi)/\xi$;

在 $(\xi, 1)$ 区间利用拉格朗日定理: $f(1) - f(\xi) = f'(\eta_2)(1 - \xi)$, $\eta_2 \in (\xi, 1)$, 得

$f'(\eta_2) = \xi/(1 - \xi)$; 所以 $f'(\eta_1)f'(\eta_2) = 1$, 证毕!

注: 此题结论里要求的“存在不同的两点”, 应对的方法是找不同的区间。

一般两个问号的话, 第二个极可能需要第一个的结论! (这是个重要**线索**)

13 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

解析: 条件有二阶导数的不等式多用泰勒展开证明。

证明: 将 $f(x)$ 分别在 $x = a$, 和 $x = b$ 点展开:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2 = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2, \xi_1 \in (a,b)$$

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2 = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2, \xi_2 \in (a,b)$$

$$x = \frac{a+b}{2} \text{ 分别代入两式: } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2 = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2,$$

$$\text{则有 } |f(b) - f(a)| = \left| \frac{f''(\xi_2)}{2} - \frac{f''(\xi_1)}{2} \right| \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 (|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|) \leq \frac{1}{4}(b-a)^2 |f''(\xi)|$$

$|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$; 由此得证结论!

14 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶连续可导，则至少存在一点

$$\xi \in (a,b), \text{ 使得 } f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi)$$

证明：根据题目中的线索，选择在 $x_0 = \frac{a+b}{2}$ 处做泰勒展开

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2, \quad \xi \text{ 介于 } \frac{a+b}{2} \text{ 与 } x \text{ 之间};$$

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad \xi_1 \text{ 介于 } (a, \frac{a+b}{2})$$

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad \xi_2 \text{ 介于 } (\frac{a+b}{2}, b) \text{ (选择不同的 } \xi \text{ 是考点!)}$$

$$\text{所以 } f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{4} \left[\frac{f''(\xi_1)}{2} + \frac{f''(\xi_2)}{2}\right];$$

因为 $f(x)$ 二阶连续可导，由介值定理，存在 $\xi \in (a,b)$ ，使得 $\frac{f''(\xi_1)}{2} + \frac{f''(\xi_2)}{2} = f''(\xi)$ ；结论得证！

15 设 $f(x)$ 二阶可导, $f'(0) = f'(1)$, $|f''(x)| \leq 1$;

求证 (1) $x \in (0,1)$ 时, $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$;

$$(2) \quad \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}.$$

证明: 解析: 条件给出了 0 点和 1 点的导数关系, 可选择在这两点分别展开:

在 0 点展开: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2$; ξ_1 介于 $(0,x)$; --(1)

在 1 点展开: $f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2$; ξ_2 介于 $(x,1)$ --(2)

(1)乘 $(1-x)$ + (2)乘 x 可得:

$$f(x) = (1-x)f(0) + xf(1) + \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2x; ---(3)$$

$$|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| = \left| \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2x \right| \leq \frac{x(1-x)}{2};$$

(2) 对 (3) 式两边定积分: 即可证得结论 (2)

16 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处 ()

(A) 连续且取极大值;

(B) 连续且取极小值

(C) 可导且导数为 0;

(D) 可导且导数不为 0;

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = 2$; 所以 D 正确!

17 证明不等式：当 $x > 0$ 时， $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$

证明：即证 $(1+x)\ln(1+x) > \arctan x$ ， $(1+x)\ln(1+x) - \arctan x > 0$ ；

设 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$ ，得 $f(0) = 0$ ，

$f'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2} > 0$ (当 $x > 0$ 时)，所以 $f(x) > f(0) > 0$ ，得证。

www.jingweimath.com

18 证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} \quad (-1 < x < 1)$

证明: 设 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$

注意到对称区间, 而且 $f(x)$ 是偶函数, 则只须证明在 $0 \leq x < 1$ 上不等式成立即可;

$$f(0) = 0, f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x \geq 2x - \sin x - x = x - \sin x \geq 0 \quad (0 \leq x < 1)$$

所以 $f(x) \geq f(0)$, 不等式得证。

19 当 $x > 0$ 时, 方程 $\frac{1}{2x^2} + kx = 1$ 有且仅有一个实根, 求 k 的取值范围?

解: (解析: 这是一类含参数的求解问题, 有两种方法解决:

一是求出单点区间和极值, 再判定与 x 轴的交点;

二是把参数 k 分离出来, 变成 $k = g(x)$, 先求出函数 $g(x)$ 单调区间和极值, 再讨论 函数 $g(x)$

与直线 $y=k$ 的交点, 也就是原方程的根。(做这类题目最好画出草图)

(方法一) 设 $f(x) = \frac{1}{2x^2} + kx - 1, f'(x) = k - \frac{1}{x^3};$

情形一: $k < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单减;

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$, 所以 $f(x)$ 有且只有一个根; $k=0$ 时,

方程显然只有一个根 $\sqrt{2}/2$.

情形二: $k > 0$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt[3]{\frac{1}{k}}$; 在 $(0, \sqrt[3]{\frac{1}{k}})$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单减;

在 $(\sqrt[3]{\frac{1}{k}}, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单增; $x = \sqrt[3]{\frac{1}{k}}$ 是极小值点; 又 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

所以当且仅当 $f(\sqrt[3]{\frac{1}{k}}) = 0$ 时, 方程有且仅有一个解; 即 $k = \frac{2\sqrt{6}}{9}$.

综上, $k \leq 0$ 或者 $k = \frac{2\sqrt{6}}{9}$ 时原方程有且只有一个根。

方法二，原方程得： $k = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3}$ ；令 $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3}$ ($g(x)=k$ 即是原方程的根)

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^4} = \frac{2x^2-3}{2x^4}, \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ 时, } g'(x)=0, \quad \text{在 } (0, \sqrt{\frac{3}{2}}) \text{ 上 } g'(x) > 0, g(x) \text{ 单增,}$$

在区间 $(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$ 上 $g'(x) < 0, g(x)$ 单减；所以函数在 $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ 时取极大值，

$$g(\sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{2\sqrt{6}}{9}; \quad \text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} g(x) = -\infty \quad (\text{利用草图})$$

可知当 $k \leq 0$ 时，函数 $y = g(x)$ 与直线 $y=k$ 有且只有一个交点，即方程有且只有一个根；

又当 $k = \frac{2\sqrt{6}}{9}$ 时， $y = g(x)$ 与 $y=k$ 有且只有一个交点，即方程有且只有一个根。

20 (设函数 $f(x) = ax - b \ln x$ ($a > 0$) 有两个零点, 则 $\frac{b}{a}$ 满足

- (A) $(e, +\infty)$ (B) $(0, e)$ (C) $(0, \frac{1}{e})$ (D) $(\frac{1}{e}, +\infty)$

解: 法一, 有两个零点, 则函数与 x 轴交两次, 则必须或者其最小值在 x 轴下方,

或者其最大值在 x 轴上方;

(函数曲线与 x 轴相切则只有一个零点)

又 $f'(x) = a - \frac{b}{x}$, 而 $x > 0$, 所以必须 $b > 0$, 不然 $f'(x) > 0$ 单增, 不可能有两个零点;

又由 $x \rightarrow +0$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 所以其最小值必须在 x 轴下;

由 $f'(x) = a - \frac{b}{x} = 0$, 得驻点 $x = \frac{b}{a}$, $f''(\frac{b}{a}) > 0$, 所以为极小值, 且 $f(\frac{b}{a}) = b - b \ln \frac{b}{a} < 0$

由上可得 $\frac{b}{a} > e$, 只有 A 选项正确。

法二, 图形法 首先值 $b \neq 0$, 或者由上求导知 $b > 0$, 设直线 $y = \frac{a}{b}x$, 以及曲线 $y = \ln x$

当直线与曲线相切时恰好有一个根, 相交则有两个根, 即函数由两个零点

而切点处两个函数值与导数值相等, 可得切点为 $(e, 1)$, 对应直线斜率为 $\frac{1}{e}$,

则只要 $\frac{a}{b} < \frac{1}{e}$, 即 $\frac{b}{a} > e$ 即可满足条件, 可知选项 A 正确。

21 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间和极值。

解：（解析：处理积分上限的函数的时候，先分析出 x 项）

$$f(x) = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} t e^{-t^2} dt;$$

$$f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + x^2 e^{-x^2} - x^2 e^{-x^2} = 2x \int_1^{x^2} t e^{-t^2} dt$$

$x = 0, x = 1, x = -1$ 是驻点；（可以利用二阶导数确定极值点，或者直接分析一阶导数的符号）

由第一充分条件：当 $x < -1$ 时， $f'(x) < 0$ ， $-1 < x < 0$ 时， $f'(x) > 0$ ；

由此可知， $x = -1$ 为极小值点，

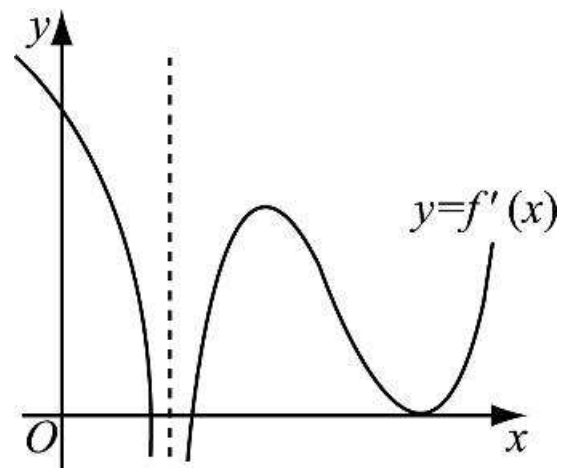
极小值为： $f(-1) = \int_1^1 e^{-t^2} dt + \int_1^1 t e^{-t^2} dt = 0$ ；同理， $x=1$ 也是极小值点， $f(1)=0$ ；

在 $x = 0$ 点两边， $f'(x)$ 由正变负，则为极大值点， $f(0) = -\int_1^0 t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}(1-e^{-1})$ ；

单调区间： $(-\infty, -1)$ 单减； $(-1, 0)$ 单增， $(0, 1)$ 单减， $(1, \infty)$ 单增。

22 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数 $f'(x)$ 的图形如图所示, 则 ()

- (A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点
- (B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点
- (C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点
- (D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点



解析：极值点：函数的单调性改变；**一阶导数变号**；（可能在 $f'(x) = 0$ 的点，以及导数不存在的点）

拐点：凹凸性改变（一阶导函数的单调性改变）；**二阶导数变号**；

（可能在 $f''(x) = 0$ ，以及二阶导数不存在的点）

答案： (B)

23 证明对非负实数 a, b 有 $2\arctan(\frac{a+b}{2}) \geq \arctan a + \arctan b$

证明: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$; $(\arctan x)'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} < 0$ ($x > 0$ 时)

所以 $\arctan x$ 当 $x > 0$ 时是凸函数; 由定义: $\arctan(\frac{a+b}{2}) \geq \frac{\arctan a + \arctan b}{2}$ 。

(也可以用泰勒公式证)

24 曲线 $y = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$ 有几条渐近线?

解: $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) = -\infty$; 所以 $x = -1$ 为垂直渐近线;

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) = 0$, 所以不是渐近线; $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) = \infty$, 所以没有水平渐近线;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + \frac{1}{x}) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - x] = -\frac{1}{2},$$

所以函数有一条斜渐近线: $y = x - \frac{1}{2}$; 由此共有两条渐近线.

www.jingweimath.com

25 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 2$, 则在点 $x = 0$ 处 $f(x)$ ()

(A) 不可导; (B) 可导, 且 $f'(0) \neq 0$; (C) 取得极大值; (D) 取得极小值

解: (直接法) 极限等于2 大于零, 由保号性, 在某邻域内 $\frac{f(x)}{1-\cos x} > 0$,

即 $f(x) > 0 = f(0)$, 因此 极小值!

(找特殊函数法) 可取 $f(x) = x^2$, 满足条件, 只有 D 正确。

26 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则 ()

(A) $f(0)$ 是极大值; (B) $f(0)$ 是极小值; (C) $(0, f(0))$ 是拐点; (D) 上面都不对

解: 由极限的存在性 (保号性) 可知, 在 $x=0$ 点的邻域内,

当 $x < 0$ 时, $f''(x) < 0$; $x > 0$ 时, $f''(x) > 0$, 二阶导数变号, 因此是拐点!

27 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则 ()

- (A) $x=0$ 是函数的极值点, 但 $(0,0)$ 不是曲线的拐点;
- (B) $x=0$ 不是函数的极值点, 但 $(0,0)$ 是曲线的拐点;
- (C) $x=0$ 是函数的极值点, 且 $(0,0)$ 是曲线的拐点;
- (D) $x=0$ 不是函数的极值点, $(0,0)$ 也不是曲线的拐点;

解: 由题, $f(0) = 0$, 在 $x = 0$ 的某邻域内(使得 $(1-x)$ 恒大于0) ,

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x - x^2$; $f'(x) = 1 - 2x$, $f''(x) = -2$;

当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x + x^2$; $f'(x) = -1 + 2x$, $f''(x) = 2$;

由此可知, 在 0 点的邻域内, $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 过 0 点时都变号, 因此 C 正确!

28 设函数 $y = f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + f''(x)}{\ln(1+x)} = 1$, 判断点 $(0, f(0))$ 是否为曲线的拐点?

解: 首先, 因为极限存在, 则必须: $\lim_{x \rightarrow 0} [f'(x) + f''(x)] = f'(0) + f''(0) = 0$; 可得 $f''(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + f''(x)}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x)}{\ln(1+x)} + \frac{f''(x)}{\ln(1+x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x} = 1$$

由此可知, $f''(x)$ 在 0 的某邻域内变号, 所以是拐点。

29 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续且单调增加, 证明 $\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$

证明: 设辅助函数 $F(x) = \int_a^x t f(t) dt - \frac{a+x}{2} \int_a^x f(t) dt$, 显然 $F(a) = 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= x f(x) - \frac{1}{2} \int_a^x f(t) dt - \frac{a+x}{2} f(x) = \frac{x-a}{2} f(x) - \frac{1}{2} \int_a^x f(t) dt \\ &= \frac{x-a}{2} [f(x) - f(\xi)] > 0, \xi \in (a, x); \end{aligned}$$

由此可得 $F(b) > F(a) = 0$, 得证不等式!

30 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (1) 在 $x=0$ 点是否可导;

(2) 是否存在 $x=0$ 的一个邻域, 使 $f(x)$ 在该邻域单调?

解: (1) 由定义: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \frac{1}{2}$, 所以函数在 0 点可导;

(2) 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{2} + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$,

对正整数 k 有 $f'(\frac{1}{2k\pi}) = -\frac{1}{2}$; $f'(\frac{1}{(2k-1)\pi}) = \frac{3}{2}$, 而 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2k+1)\pi} = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都不单调。