

经纬研选（三，一元积分）

经纬考研数学

www.jingweimath.com

1 若 $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$, 则 $\int xf'(2x)dx =$ ()

(A) $\frac{1}{2}xF'(x) - \frac{1}{4}F(x) + C;$

(B) $\frac{1}{2}xF'(x) - \frac{1}{4}F(2x) + C$

(C) $\frac{1}{2}xF'(2x) - \frac{1}{4}F(2x) + C$

(D) $\frac{1}{2}xF'(2x) - \frac{1}{4}F(x) + C$

2 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且 $f(0) = 0$, 又 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$ 求 $f(x)$

3 求 $\int e^{-x} (\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}) dx$

4 若 $\arctan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int xf'(x)dx = ?$

5 若 $\int xf(x)dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$; 求 $\int f(x)dx = ?$

6 已知 $\ln(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int xf'(x)dx$

7 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2})$

8 设 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x^3 - 1), & 0 \leq x < 1 \\ 3x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ 问 $g(x)$ 在区间 $[0,2]$

A 无界; B 递减; C 不连续; D 连续

9 求 $\int_0^{n\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$

www.jingweimath.com

10 判别下列定积分的大小

$$A \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx; \quad B \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx; \quad C \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx;$$

11 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 x f(x) dx$, 求 $f(x) = ?$

12 设函数 $y = f(x)$ 满足微分方程: $xy' - 2y = \sqrt{1-x^2}$, 且 $f(1) = 1$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$

13 设 $f(x) = \int_x^1 e^{-t^2} dt$; 求 $\int_0^1 x^2 f(x) dx$

14 设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+4} \sqrt{t} \sin\left(\frac{2}{\sqrt{t}}\right) f(t) dt$

www.jingweimath.com

15 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, 且 $0 \leq f'(x) \leq 1$, $f(0) = 0$, 证明不等式

$$[\int_0^1 f(x)]^2 \geq \int_0^1 f^3(x) dx$$

16 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单增, 证明 $\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$

17 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $\int_a^\xi f(t) dt = (1 - \xi) f(\xi)$;

18 设 $x > 0$, 证 $\int_0^x (t - t^2) \sin^{2n} t dt < \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$

19 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \{\ln x\}^\beta} dx$, α, β 为何值时积分收敛?

20 判定如下积分的敛散性:

$$\text{A } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx; \text{ B } \int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} f(x) dx; \text{ C } \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx; \text{ D } \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} dx$$

21 如果对微分方程 $y'' - 2ay' + (a+2)y = 0$ 的任一解 $y(x)$,

反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 均收敛, 那么 a 的取值范围是:

$$\text{A.} (-2, -1]; \quad \text{B.} (-\infty, -1]; \quad \text{C.} (-2, 0); \quad \text{D.} (-\infty, 0)$$

22 如果积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x-1)}{(x-1)^\lambda} dx$ 收敛, 问 λ 的取值范围?

23 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha(1+x)} dx$, α 为多少时, 反常积分收敛?

24 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x)dx = ()$

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n}$

25 设由参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ (摆线) 与 x 轴围成的平面图形为 A ; 求

1) A 的面积;

2) A 绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积

26 设 $f(x)$ 为微分方程 $xy' - y = \sqrt{2x - x^2}$ 满足 $y(1)=0$ 的解, 求 $\int_0^1 f(x)dx$

27 设直线 $y = ax$ ($0 < a < 1$) 与抛物线 $y = x^2$ 所围成的图形面积为 S_1 ,

它们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2 :

(1) 确定 a 的值, 使 $S_1 + S_2$ 的面积达到最小, 并求出最小值;

(2) 求该最小值对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积;

28 设单位质点 P, Q 分别位于点 $(0,0)$ 和 $(0,1)$ 处, P 从点 $(0,0)$ 出发沿 x 轴正向移动,

记 G 为引力常数, 则当质点 P 移动到点 $(1,0)$ 时, 克服质点 Q 的引力所做的功为:

A. $\int_0^l \frac{G}{x^2+1} dx$; B. $\int_0^l \frac{Gx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx$ C. $\int_0^l \frac{G}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx$; D. $\int_0^l \frac{G(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx$

29 设 $f(x)$ 连续, $f(x) > 0, f(-x) = f(x)$, 令

$$F(x) = \int_{-a}^a |x-t|f(t)dt \quad -a \leq x \leq a$$

(1) 证明曲线 $y = F(x)$ 在 $[-a, a]$ 上是凹的;

(2) 当 x 为何值时, $F(x)$ 取得最小值;

(3) 若 $F(x)$ 的最小值可表示为 $f(a) - a^2$, 试求 $f(x)$

30 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$,

证明存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 2\xi$