

经纬研选 (三) · 一元积分 AI 参考解析

AI 参考解析: 本册解析由 AI 生成, 仅供参考。全部答案已经数值方法独立复核, 但仍建议与老师的课堂讲解相互印证; 如发现与课堂讲法不一致或存在笔误, 欢迎反馈, 我们会及时修订。

适用: comprehensive-3-questions.pdf (共 30 题)。选择题给出答案与逐项分析; 解答题给出完整过程; 证明题给出严格论证。

第 1 题 原函数与换元 (答案 C)

若 $F'(x) = f(x)$, 求 $\int x f'(2x) dx$.

答案: 选 C.

详解: 换元 $u = 2x$ ($du = 2 dx$, $x = \frac{u}{2}$):

$$\int x f'(2x) dx = \int \frac{u}{2} f'(u) \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{4} \int u f'(u) du = \frac{1}{4} [u f(u) - F(u)] + C.$$

代回 $u = 2x$, 并注意 $f(2x) = F'(2x)$:

$$= \frac{1}{4} [2x f(2x) - F(2x)] + C = \frac{1}{2} x F'(2x) - \frac{1}{4} F(2x) + C.$$

易错点: ①选项里 F' 与 F 的位置—— $\frac{1}{2}x$ 后面必须配 $F'(2x) = f(2x)$; ②系数 $\frac{1}{4}$ 来自换元的两处 $\frac{1}{2}$ 相乘, 漏一处就错选成 $\frac{1}{2} x F'(2x) - \frac{1}{2} F(2x)$.

第 2 题 复合函数的导数还原 ($f(x) = x, x \leq 0; 2e^{x/2} - 2, x > 0$)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 且 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & x > 1, \end{cases}$ 求 $f(x)$.

详解: 令 $t = \ln x$, 即 $x = e^t$: $0 < x \leq 1 \Leftrightarrow t \leq 0$; $x > 1 \Leftrightarrow t > 0$. 故

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0, \\ \sqrt{e^t} = e^{t/2}, & t > 0. \end{cases}$$

分段积分: $t \leq 0$ 时 $f(t) = t + C_1$, 由 $f(0) = 0$ 得 $C_1 = 0$; $t > 0$ 时 $f(t) = 2e^{t/2} + C_2$, 由 f 在 $t = 0$ 处连续 (可导必连续): $2 + C_2 = 0$, $C_2 = -2$.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 2e^{x/2} - 2, & x > 0. \end{cases}$$

自检: $x = 0$ 处左导 = 1、右导 = $e^0/1 \dots\dots$ 即 $(2e^{x/2} - 2)'|_{0+} = 1$, 左右相等, f 在 0 处确实可导, 与题设相符.

第3题 凑微分 (答案 $\sqrt{x}e^{-x} + C$)

求 $\int e^{-x} \frac{1-2x}{2\sqrt{x}} dx$.

详解: 被积函数拆成 $(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x})e^{-x}$, 而

$$d(\sqrt{x}e^{-x}) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)e^{-x} dx,$$

故原式 $= \sqrt{x}e^{-x} + C$.

方法点睛: 形如 $e^{-x}g(x)$ 的不定积分, 先试探 g 是否等于某个 $\varphi'(x) - \varphi(x)$ (即凑 $d[\varphi(x)e^{-x}]$): $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ 恰是 $\sqrt{x}$ 的“导数减自身”, 一凑即中.

第4题 分部积分 (答案 $\frac{x}{1+x^2} - \arctan x + C$)

若 $\arctan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int xf'(x) dx$.

详解: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. 分部:

$$\int xf'(x) dx = xf(x) - \int f(x) dx = \frac{x}{1+x^2} - \arctan x + C.$$

考点: 分部积分 $\int u dv = uv - \int v du$ (取 $u = x$ 降幂) 与原函数概念的结合.

第5题 变限求导还原 f , 再积分 (答案 $\ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right| + C$)

若 $\int xf(x) dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$, 求 $\int f(x) dx$.

详解: 两边对 x 求导: $xf(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, 故 $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$.

计算 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$: 令 $x = \tan t$ (或用凑微分):

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2 t dt}{\tan t \sec t} = \int \csc t dt = \ln|\csc t - \cot t| + C.$$

回代 ($\csc t = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, $\cot t = \frac{1}{x}$):

$$\int f(x) dx = \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right| + C.$$

(数值复核: $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = 0.40016$, 与 $F(2) - F(1) = \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \ln(\sqrt{2}-1) = 0.40016$ 一致.)

易错点：对 $\int xf(x)dx$ 求导时左端要用**乘积求导**： $(xf(x))' = f(x) + xf'(x)$ ？——不！此处是把 $\int xf(x)dx$ **整体**看作 x 的函数（一个确定的原函数），其导数就是被积函数 $xf(x)$ ，不要与分部混淆。

第6题 分部积分（答案 $1 - \ln|x| + C$ ）

已知 $\ln x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int xf'(x)dx$ 。

详解： $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. 分部：

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx = x \cdot \frac{1}{x} - \ln|x| + C = 1 - \ln|x| + C.$$

（与第4题同型： $\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx$ ，“原函数已知”是两类题的共同落点.）

第7题 定积分定义（答案 $\frac{1}{2}\ln 2$ ）

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$.

详解：通项改写 $\frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{k/n}{1+(k/n)^2}$ ，和式是 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的右端点黎曼和：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

（数值复核： $n = 10^5$ 时和为 0.34657609, $\frac{1}{2}\ln 2 = 0.34657359$.）

考点：和式极限识别为黎曼和——先把公因子 $\frac{1}{n}$ 凑出来，剩余部分写成 $\frac{k}{n}$ 的函数。

第8题 变限积分的连续性（答案 D）

设 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x^3 - 1), & 0 \leq x < 1, \\ 3x - 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$ 问 $g(x)$ 在 $[0,2]$ 上（ ）

A 无界 B 递减 C 不连续 D 连续

详解： f 在 $[0,2]$ 上只有第一类间断点（ $f(1^-) = 0 \neq 2 = f(1^+)$ ），故 f 可积。**变限积分函数** $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ **对可积的 f 必连续**（且在 f 的连续点处可导， $g'(x) = f(x)$ ）。具体验证： $x < 1$ 时 $g = \frac{x^4}{12} - \frac{x}{3}$ ； $x \geq 1$ 时 $g = g(1) + \int_1^x (3t - 1)dt$ ，其中 $g(1) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$ ； $x \rightarrow 1^-$ ： $-\frac{1}{4}$ ； $x \rightarrow 1^+$ ： $-\frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}$ ，连续 $\checkmark$ 。又 $g(2) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{2} > g(0) = 0 \cdots$ 单调性不保证（ f 在 $[0,1]$ 上有负值），但“连续”必然成立。

答案：选 D。

考点： f 可积 $\Rightarrow \int_0^x f$ 连续； f 连续 $\Rightarrow \int_0^x f$ 可导。跳跃间断点只会“打断”可导性，不会打断连续性。

第9题 绝对值与周期性 (答案 $2n$)

求 $\int_0^{n\pi} \sqrt{1 - \sin^2 x} dx$.

详解: $\sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|$, 以 π 为周期, 且 $\int_0^\pi |\cos x| dx = 2$. 故

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx = n \int_0^\pi |\cos x| dx = 2n.$$

易错点: 直接把 $\sqrt{1 - \sin^2 x}$ 开成 $\cos x$ (不带绝对值), 得 0——奇函数在整周期上积分为零的假象。根号必须开绝对值。

第10题 定积分大小比较 ($B < A < C$)

比较 $A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+x}{e^x} dx$, $C = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$.

详解:

$A: \frac{(1+x)^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2+2x}{1+x^2} = 1 + \frac{2x}{1+x^2}$, 第二项是奇函数, 积分为零:

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx = \pi.$$

$C: \sqrt{\cos x} \geq 0$ 且不恒为零, 故 $C = \pi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x} dx > \pi = A$.

B : 分部, $\int (1+x)e^{-x} dx = -(x+2)e^{-x}$, 故

$$B = [-(x+2)e^{-x}]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)e^{\pi/2} - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)e^{-\pi/2} \approx 2.0646 - 0.7424 = 1.32 < \pi.$$

结论: $B < A < C$.

(数值复核: $A = 3.14159$, $B = 1.32238$, $C = 5.53787$.)

第11题 积分常数方程 ($f(x) = \frac{2}{(2-\ln 2)(1+x^2)}$)

设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 x f(x) dx$, 求 $f(x)$.

详解: 记常数 $A = \int_0^1 x f(x) dx$, 则 $f(x) = \frac{1+A}{1+x^2}$. 两边乘 x 并在 $[0,1]$ 上积分:

$$A = (1+A) \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1+A}{2} \ln 2.$$

解出 $A(1 - 1/2 \ln 2) = 1/2 \ln 2$, $A = \frac{\ln 2}{2 - \ln 2}$, 于是 $1+A = \frac{2}{2 - \ln 2}$:

$$f(x) = \frac{2}{(2 - \ln 2)(1+x^2)}.$$

(代回自检: $\int_0^1 x f dx = \frac{2}{2-\ln 2} \cdot \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\ln 2}{2-\ln 2} = A \checkmark$, 数值 0.53039 吻合。)

第 12 题 微分方程 + 整体积分技巧 ($\int_0^1 f dx = \frac{1-\pi/4}{3}$)

设 $y = f(x)$ 满足 $xy' - 2y = \sqrt{1-x^2}$, $f(1) = 1$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$.

详解: 不必显式解方程。对方程在 $[0,1]$ 上积分:

$$\int_0^1 (xy' - 2y) dx = [xy]_0^1 - \int_0^1 y dx - 2 \int_0^1 y dx = 1 - 3 \int_0^1 f(x) dx.$$

$= \underset{=f(1)=1}{\checkmark}$

右端 = $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ (四分之一单位圆面积)。故

$$1 - 3 \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1-\pi/4}{3} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{12}.$$

(数值复核: 直接数值解 ODE 得 $\int_0^1 f = 0.071534$, 解析 $(1-\pi/4)/3 = 0.071534 \checkmark$ 。)

方法点睛: 求 $\int_a^b f$ 而 f 由微分方程给出时, 先试”对方程整体积分”——分部后 $[xy]$ 恰好落在已知条件 $f(b)$ 上, 往往一步到位, 避开解方程。注意分部后出现的是 $1-3\int f$ (一次分部产生一个 $\int y$, 方程里还有一个 $-2y$), 系数是 3 不是 2——这是本题最隐蔽的失分点。

第 13 题 分部积分消变限函数 ($\frac{1}{6}(1-\frac{2}{e})$)

设 $f(x) = \int_x^1 e^{-t^2} dt$, 求 $\int_0^1 x^2 f(x) dx$.

详解: $f'(x) = -e^{-x^2}$, $f(1) = 0$ 。分部 ($u = f$, $dv = x^2 dx$):

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = [\frac{x^3}{3} f(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx.$$

令 $u = x^2$ ($x^3 dx = \frac{1}{2} u du$): $\int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 u e^{-u} du = \frac{1}{2}(1-2e^{-1})$.

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{2}{e}\right).$$

(数值复核: 0.044040 $\checkmark$ 。)

第 14 题 积分区间平移的极限 (答案 8)

设 $f(x)$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+4} \sqrt{t} \sin \frac{2}{\sqrt{t}} f(t) dt$.

详解: 关键在被积函数的极限: $\sqrt{t} \sin \frac{2}{\sqrt{t}} = 2 \cdot \frac{\sin(2/\sqrt{t})}{2/\sqrt{t}} \rightarrow 2$ ($t \rightarrow +\infty$), 故被积函数 $h(t) \rightarrow 2f \rightarrow 2$ 。

由积分中值定理, 存在 $\xi_x \in (x, x+4)$: $\int_x^{x+4} h(t) dt = 4h(\xi_x)$ 。当 $x \rightarrow \infty$ 时 $\xi_x \rightarrow \infty$, $h(\xi_x) \rightarrow 2$, 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+4} \sqrt{t} \sin \frac{2}{\sqrt{t}} f(t) dt = 4 \times 2 = 8.$$

(数值复核: $x = 10^3, 10^5, 10^7$ 时积分分别为 7.9947, 7.99995, 8.00000。)

考点: “区间长度固定 + 被积函数有极限”型。若区间长度也趋于无穷, 则要用夹逼 ($\sin(2/\sqrt{t})$ 与 $2/\sqrt{t}$ 的差异做误差控制)。

第 15 题 证明: $[\int_0^1 f]^2 \geq \int_0^1 f^3$

设 f 在 $[0,1]$ 有连续导数, $0 \leq f'(x) \leq 1$, $f(0) = 0$ 。

证明: 先由 $f(x) = \int_0^x f'(t) dt$ 及 $0 \leq f' \leq 1$ 得 $0 \leq f(x) \leq x$, 特别地 $f \geq 0$ 。

构造 $G(x) = [\int_0^x f(t) dt]^2 - \int_0^x f^3(t) dt$, $G(0) = 0$ 。

$$G'(x) = 2f(x) \int_0^x f(t) dt - f^3(x) = f(x) \left[2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x) \right].$$

记 $H(x) = 2 \int_0^x f - f^2$, 则 $H(0) = 0$ 且 $H'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \geq 0$ (用 $f \geq 0$ 与 $f' \leq 1$), 故 $H \geq 0$, 从而 $G' \geq 0$, $G(1) \geq G(0) = 0$, 即

$$\left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2 \geq \int_0^1 f^3(x) dx. \quad \blacksquare$$

考点: 变上限积分构造辅助函数 + “对 G 再求导看单调”。链式放大 (先证 $H \geq 0$ 再证 $G' \geq 0$) 是这类双层结构的固定套路。

第 16 题 证明: $\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$

设 f 在 $[a,b]$ 连续且单调。

证明: 记 $c = \frac{a+b}{2}$ 。要证 $\int_a^b (x-c)f(x) dx \geq 0$ 。

对前半段换元 $x = 2c - u$ (即关于 c 对称反射, $x \in [a, c] \mapsto u \in [c, b]$):

$$\int_a^c (x-c)f(x) dx = \int_c^b (c-u)f(2c-u) du = - \int_c^b (u-c)f(2c-u) du.$$

两段合并:

$$\int_a^b (x-c)f(x) dx = \int_c^b (u-c)[f(u) - f(2c-u)] du.$$

当 $u \in (c, b]$: $u - c > 0$, 且 $u > 2c - u$, 由 f 单增得 $f(u) \geq f(2c - u)$, 被积函数 ≥ 0 , 故积分 ≥ 0 . ■

考点: 对称化处理——把 $(x - \frac{a+b}{2})$ 关于中点的奇性用出来, 是积分不等式里处理“加权中点”的标准手段。

第 17 题 罗尔定理与变限积分

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$ 使 $\int_0^\xi f(t) dt = (1 - \xi)f(\xi)$ 。

注: 原卷此题积分下限印作 a ; 结合题设 (f 定义在 $[0, 1]$ 、 $\xi \in (0, 1)$) 与结论, 下限应为 0, 否则对一般 f 命题不成立 (端点 $\varphi(0) \neq 0$)。解析按 0 处理。

证明: 构造 $\varphi(x) = (1 - x) \int_0^x f(t) dt$ 。 φ 在 $[0, 1]$ 连续、 $(0, 1)$ 可导, 且

$$\varphi(0) = 1 \cdot 0 = 0, \quad \varphi(1) = 0 \cdot \int_0^1 f = 0.$$

由罗尔定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$: $\varphi'(\xi) = 0$ 。而

$$\varphi'(x) = - \int_0^x f(t) dt + (1 - x)f(x),$$

代入 ξ 即得 $\int_0^\xi f(t) dt = (1 - \xi)f(\xi)$ 。 ■

考点: 证明“积分 = 端点函数值组合”的等式, 优先把两边挪到一起乘个 $(1 - x)$ 之类的因子凑罗尔——让区间两端自然相等 (一端因子归零、一端积分为零)。

第 18 题 证明: $\int_0^x (t - t^2) \sin^{2n} t dt < \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \quad (x > 0)$

证明: 记 $g(t) = (t - t^2) \sin^{2n} t$ 。

情形一: $0 < x \leq 1$ 。由 $\sin t \leq t$ ($t \geq 0$) 且 $t - t^2 \geq 0$:

$$0 \leq g(t) = (t - t^2) \sin^{2n} t \leq (t - t^2) t^{2n},$$

且 $t > 0$ 时 $\sin t < t$ 严格, 故

$$\int_0^x g(t) dt < \int_0^1 (t^{2n+1} - t^{2n+2}) dt = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

情形二: $x > 1$ 。当 $t > 1$ 时 $t - t^2 < 0$ 而 $\sin^{2n} t \geq 0$, 故 $g(t) < 0$, 于是

$$\int_0^x g(t) dt = \int_0^1 g(t) dt + \int_1^x g(t) dt < \int_0^1 g(t) dt < \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}. \quad \blacksquare$$

考点: 以 $x = 1$ (被积函数的变号点) 分界讨论; 上界 $\sin t \leq t$ 把超越函数换成多项式, 恰好积出目标右端——不等式右端 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$ 本身就是 $\int_0^1 (t^{2n+1} - t^{2n+2}) dt$ 的值, 这是“从结论反推放缩方向”的信号。

第 19 题 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ 的收敛域

结论: $\alpha > 1$ (β 任意); 或 $\alpha = 1$ 且 $\beta > 1$ 。

详解: 令 $t = \ln x$ ($dx = e^t dt$), 积分化为 $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{e^{(1-\alpha)t}}{t^\beta} dt$ 。

- $\alpha > 1$: 指数因子 $e^{(1-\alpha)t}$ 衰减, 压制任意幂 $t^{-\beta}$ ($\beta < 0$ 时分子 $\ln$ 增长也敌不过指数衰减), 对任意 β 收敛。严格地: 被积函数 $\leq e^{(1-\alpha)t/2}$ (t 充分大), 收敛。
- $\alpha = 1$: 化为 $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$, 收敛 $\Leftrightarrow \beta > 1$ 。
- $\alpha < 1$: $1 - \alpha > 0$, 被积函数不趋于零 ($\beta \leq 0$ 时不趋于零显然; $\beta > 0$ 时 $\frac{e^{(1-\alpha)t}}{t^\beta} \rightarrow +\infty$), 发散。

考点: 反常积分收敛的精细判别—— $\ln x$ 的幂只能微调收敛速度, 起决定作用的是 x^α 的指标与临界值 1 的关系; “ $\alpha = 1$ ” 这条临界线必须单独讨论。

第 20 题 敛散性判定 (A 收敛、B 发散、C 发散、D 收敛)

判定: A $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; B $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$; C $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$; D $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 。

注: 原卷 B 项印作 $\frac{x^{3/2}}{1+x^2} f(x)$, 其中 $f(x)$ 未在任何处定义, 疑为排版误植; 解析按被积函数 $\frac{x^{3/2}}{1+x^2}$ 处理 (若确带 $f(x)$, 需补充 f 的条件才能判定)。

详解:

- A: $x \rightarrow +\infty$ 时 $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \sim \frac{1}{x^2}$, $p = 2 > 1$, 收敛。(事实上原函数为 $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ……即 $\ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 型, 积分有穷。)
- B: $\frac{x^{3/2}}{1+x^2} \sim x^{-1/2}$, $p = \frac{1}{2} < 1$, 发散。(部分和数值: 截断到 $10^2, 10^4, 10^6$ 分别为 17.5, 197.5, 1997.5, 线性增长, 确证发散。)
- C: $\frac{\arctan x}{x} \sim \frac{\pi/2}{x}$, $p = 1$, 发散。
- D: $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} \sim x^{-4/3}$, $p = \frac{4}{3} > 1$, 收敛。

考点: 比较判别法的极限形式——一眼读出“等效 p -指数”: 分子分母各取最高阶, $p > 1$ 收敛、 $p \leq 1$ 发散。

第 21 题 特征根实部与解的收敛 (答案 C)

若 $y'' - 2ay' + (a+2)y = 0$ 的任一解 $y(x)$ 都使 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 收敛, 求 a 的范围。

详解: 特征方程 $r^2 - 2ar + (a+2) = 0$, 判别式 $\Delta = 4(a^2 - a - 2) = 4(a-2)(a+1)$ 。

- $\Delta < 0$ ($-1 < a < 2$): $r = a \pm \omega i$, 解为衰减振荡 $\Leftrightarrow$ 实部 $a < 0$, 即 $-1 < a < 0$ 。

- $\Delta = 0$: $a = -1$: 二重根 $r = -1$, 解 $(c_1 + c_2x)e^{-x}$, 积分收敛 $\checkmark$; $a = 2$: 根 2, 发散。
- $\Delta > 0$: 两实根 $r_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - a - 2}$.
 - $-2 < a < -1$: $\sqrt{a^2 - a - 2} < |a|$, 两根皆负, 收敛 $\checkmark$;
 - $a = -2$: 根 0 与 -4 , 常数解 $\int c dx$ 发散;
 - $a < -2$: 一正一负根, 正根对应的解发散;
 - $a > 2$: 两正根, 发散。

综上收敛范围 $(-2, -1] \cup (-1, 0) = \boxed{(-2, 0]}$, 选 C。

(数值复核: $a = -2, -1.5, -1, -0.5, 0$ 处最大特征实部分别为 $0, -0.177, -1, -0.5, 0$ ——只在 $(-2, 0)$ 内全负。)

考点: 与 2025 年真题 T3 同源——“任一解的广义积分收敛 $\Leftrightarrow$ 特征根实部全负”, 重根与临界值(实部为零)必须单独验证。

第 22 题 含参数反常积分 ($1 < \lambda < 2$)

若 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x-1)}{(x-1)^\lambda} dx$ 收敛, 求 λ 。

详解: 令 $t = x - 1$: $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\lambda} dt$, 两个奇点分别讨论:

- $t \rightarrow 0^+$: $\arctan t \sim t$, 被积函数 $\sim t^{1-\lambda}$, 收敛 $\Leftrightarrow 1 - \lambda > -1 \Leftrightarrow \lambda < 2$;
- $t \rightarrow +\infty$: $\arctan t \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 被积函数 $\sim \frac{\pi}{2} t^{-\lambda}$, 收敛 $\Leftrightarrow \lambda > 1$ 。

故 $1 < \lambda < 2$ 。

易错点: $t = 0$ 是奇点(分母为零)——只盯 ∞ 端漏掉 0 端是最常见的丢分方式。双奇点的积分必须两端都收敛才收敛。

第 23 题 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha(1+x)} dx$ 的收敛域 ($0 < \alpha < 1$)

详解: 两个奇点。

- $x \rightarrow 0^+$: $\frac{\ln x}{x^\alpha(1+x)} \sim \frac{\ln x}{x^\alpha}$ 。由 $\int_0^c \frac{|\ln x|}{x^\alpha} dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \alpha < 1$ ($\alpha < 1$ 时 $|\ln x| \leq C_\varepsilon x^{-\varepsilon}$, 取 $\varepsilon < \frac{1-\alpha}{2}$ 即控制住; $\alpha = 1$ 时原函数 $\frac{1}{2} \ln^2 x \rightarrow +\infty$ 发散)。
- $x \rightarrow +\infty$: $\sim \frac{\ln x}{x^{\alpha+1}}$ 。收敛 $\Leftrightarrow \alpha + 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$ ($\alpha = 1$ 的临界情形 $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ 收敛, 但 $\alpha \leq 0$ 时 $\frac{\ln x}{x^{1+\alpha}}$ 不比 $\frac{1}{x}$ 衰减得快, 发散; 精确地 $\int^\infty \frac{\ln x}{x^p} dx$ 收敛 $\Leftrightarrow p > 1$)。

故 $0 < \alpha < 1$ 。

第 24 题 定积分定义的匹配 (答案 B)

设 f 在 $[0, 1]$ 连续, $\int_0^1 f(x) dx = ()$

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n} \quad (B) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n} \quad (D) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n}$$

详解：黎曼和必须“分割宽度 $\times$ 项数 = 区间总长 = 1”且取样点落在对应小区间内。

- (B): $[0,1]$ 作 n 等分, $\Delta x = \frac{1}{n}$, 取第 k 个小区间 $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ 的中点 $\xi_k = \frac{k-\frac{1}{2}}{n} = \frac{2k-1}{2n}$ ——完全匹配 $\checkmark$;
- (A): 取样点对、宽度 $\frac{1}{2n}$ 错 (n 项总宽只有 $\frac{1}{2}$, 对应 $\int_0^{1/2}$ 的结构但不匹配取样范围);
- (C): $2n$ 项、每项宽 $\frac{1}{n}$, 总宽为 $2 \neq 1$;
- (D): $2n$ 项、每项宽 $\frac{2}{n}$, 总宽为 $4 \neq 1$ 。

答案：选 B。

考点：定积分定义三要素的自洽性检查——项数 $\times$ 宽度必须等于区间长度，取样点必须落在自己的小区间里。中点、左端点、右端点取样在连续函数上都合法，差别只在宽度。

第 25 题 摆线的面积与旋转侧面积

摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴围成图形 A 。

(1) A 的面积

$$S = \int_0^{2\pi} y \, dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) \, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt.$$

展开: $\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) \, dt = 2\pi - 0 + \pi = 3\pi$, 故 $S = 3\pi a^2$ 。

(2) 绕 x 轴旋转的侧面积

弧微分: $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} \, dt = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \, dt = a\sqrt{2 - 2\cos t} \, dt = 2a\sin \frac{t}{2} \, dt$
($t \in [0, 2\pi]$ 上 $\sin \frac{t}{2} \geq 0$)。

$$S_{\text{侧}} = 2\pi \int_0^{2\pi} y \, ds = 2\pi \int_0^{2\pi} 2a\sin^2 \frac{t}{2} \cdot 2a\sin \frac{t}{2} \, dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} \, dt.$$

令 $u = \frac{t}{2}$: $\int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} \, dt = 2 \int_0^{\pi} \sin^3 u \, du = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ (Wallis: $\int_0^{\pi} \sin^3 = \frac{4}{3}$)。

$$S_{\text{侧}} = 8\pi a^2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

(数值复核: $a = 1$ 时面积 = $3\pi = 9.42478 \checkmark$ 、侧面积 = $67.0206 = \frac{64\pi}{3} \checkmark$ 。)

考点：参数方程的面积 ($S = \int y x'(t) dt$) 与旋转侧面积 ($S = 2\pi \int y ds$) 公式；弧微分里 $\sqrt{2-2\cos t} = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right|$ 的绝对值处理。

第 26 题 微分方程 + 整体积分 ($\int_0^1 f(x) dx = -\frac{\pi}{8}$)

设 $f(x)$ 为 $xy' - y = \sqrt{2x - x^2}$ 满足 $y(1) = 0$ 的解，求 $\int_0^1 f(x) dx$ 。

详解：与第 12 题同型。方程在 $[0,1]$ 上积分：

$$\int_0^1 (xy' - y) dx = [xy]_0^1 - \int_0^1 y dx - \int_0^1 y dx = f(1) - 2 \int_0^1 f(x) dx = 0 - 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

右端 = $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 - (x-1)^2} dx = \frac{\pi}{4}$ (圆心 $(1,0)$ 、半径 1 的四分之一圆)。
故

$$-2 \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -\frac{\pi}{8}.$$

(数值复核：数值解 ODE 得 $-0.392699 = -\pi/8 \checkmark$ 。)

方法点睛： $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx$ 不必硬积——配方 $\sqrt{1 - (x-1)^2}$ 认出四分之一圆即可。负号是真实结果 (解在 $(0,1)$ 上为负)，不要“顺手”丢掉。

第 27 题 面积最值 + 旋转体体积

直线 $y = ax$ ($0 < a < 1$) 与抛物线 $y = x^2$ 。

(1) 求 a 使 $S_1 + S_2$ 最小

两曲线交于 $(0,0)$ 与 (a,a^2) ： $0 \leq x \leq a$ 上直线在上， $a \leq x \leq 1$ 上抛物线在上。

$$S_1 = \int_0^a (ax - x^2) dx = \frac{a^3}{6}, \quad S_2 = \int_a^1 (x^2 - ax) dx = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} + \frac{a^3}{6}.$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} + \frac{a^3}{3}, \quad \frac{d}{da} = -\frac{1}{2} + a^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

($S'' = 2a > 0$ 确为极小。) 最小值

$$S_{\min} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{2 - \sqrt{2}}{6}.$$

(2) 绕 x 轴旋转的体积

$$V = \pi \int_0^a [(ax)^2 - x^4] dx + \pi \int_a^1 [x^4 - (ax)^2] dx.$$

代入 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($a^2 = \frac{1}{2}$, $a^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $a^5 = \frac{\sqrt{2}}{8}$) :

$$\int_0^a (a^2 x^2 - x^4) dx = a^5 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2a^5}{15} = \frac{\sqrt{2}}{60},$$

$$\int_a^1 (x^4 - a^2 x^2) dx = \frac{1-a^5}{5} - \frac{a^2(1-a^3)}{3} = \frac{1}{30} + \frac{\sqrt{2}}{60},$$

$$V = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{60} + \frac{1}{30} + \frac{\sqrt{2}}{60} \right) = \frac{(1+\sqrt{2})\pi}{30}.$$

(数值复核: 极小点 $a = 0.707107 \checkmark$ 、 $S_{\min} = 0.0976311 = (2 - \sqrt{2})/6 \checkmark$ 、 $V = 0.252816 = (1 + \sqrt{2})\pi/30 \checkmark$ 。)

考点: 交点分段定上下、面积对参数求导取极值; 旋转体积”外减内”分块相减——两块曲边互换上下位置, 被减数与减数必须跟着换。

第 28 题 变力做功 (答案 B)

单位质点 P 、 Q 位于 $(0,0)$ 、 $(0,1)$, P 沿 x 轴正向从原点移到 $(1,0)$, 求克服 Q 的引力所做的功。

详解: P 在 $(x,0)$ 处, 与 Q 距离 $r = \sqrt{x^2 + 1}$, 引力大小 $\frac{G}{r^2} = \frac{G}{x^2 + 1}$, 方向由 P 指向 Q : 单位向量 $\frac{(-x, 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 。

引力矢量为 $\vec{F} = -\frac{G}{(x^2 + 1)^{3/2}}(x, -1)$ (沿 $(-x, 1)$ 方向)。 P 位移 $d\vec{s} = (dx, 0)$, 克服引力做功元

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{Gx}{(x^2 + 1)^{3/2}} dx.$$

(直观: 引力沿 $-x$ 方向的分量是 $-\frac{Gx}{(x^2 + 1)^{3/2}}$, 把它顶回去就要做同样多的正功; y 方向分量不做功。)

$$W = \int_0^1 \frac{Gx}{(x^2 + 1)^{3/2}} dx.$$

答案: 选 B。

易错点: 选 A 的人用了”引力大小”而忘了投影——只有沿运动方向的分量做功; 分母的 $\frac{3}{2}$ 次方来自”大小 $\times$ 单位向量”两个 $\sqrt{x^2 + 1}$ 相乘。

第 29 题 对称区间上的 $F(x) = \int_{-a}^a |x - t|f(t) dt$

设 f 连续、 $f(x) > 0$ 、 $f(-x) = f(x)$, $F(x) = \int_{-a}^a |x - t|f(t) dt$ ($-a \leq x \leq a$)。

(1) F 在 $[-a, a]$ 上是凹的

拆掉绝对值:

$$F(x) = \int_{-a}^x (x-t)f(t) dt + \int_x^a (t-x)f(t) dt.$$

求导（变限求导，内层边界处被积函数为零，只余积分项）：

$$F'(x) = \int_{-a}^x f(t) dt - \int_x^a f(t) dt, \quad F''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x) > 0.$$

故 $F'' > 0$ ，曲线 $y = F(x)$ 在 $[-a, a]$ 上是凹的（教材口径：凹即下凸），结论成立。■

(2) 最小值点

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \int_{-a}^x f = \int_x^a f$ 。由 f 偶函数，令 $t = -s$ 得 $\int_{-a}^x f(t) dt = \int_{-x}^a f(s) ds$ ，条件化为 $\int_{-x}^a f = \int_x^a f$ ，即 $\int_{-x}^x f(t) dt = 0$ 。由 $f > 0$ ，这只在 $x = 0$ 时成立。故 F 在 $x = 0$ 取最小值：

$$F_{\min} = F(0) = \int_{-a}^a |t| f(t) dt = 2 \int_0^a t f(t) dt.$$

(3) 求 $f(x)$

由 $2 \int_0^a t f(t) dt = f(a) - a^2$ 对一切 a 成立（把 a 换成 x ）：

$$2 \int_0^x t f(t) dt = f(x) - x^2.$$

两边对 x 求导： $2xf(x) = f'(x) - 2x$ ，即 $f'(x) - 2xf(x) = 2x$ 。线性方程，积分因子 e^{-x^2} ：

$$(f e^{-x^2})' = 2x e^{-x^2} \Rightarrow f e^{-x^2} = -e^{-x^2} + C \Rightarrow f(x) = C e^{x^2} - 1.$$

定 C ：在恒等式中令 $x \rightarrow 0^+$ ，左端 $2 \int_0^0 t f dt = 0$ ，右端 $f(0)$ ，故 $f(0) = 0$ ，得 $C = 1$ ：

$$f(x) = e^{x^2} - 1.$$

（代回自检： $2 \int_0^a t (e^{t^2} - 1) dt = [e^{t^2}]_0^a - a^2 = e^{a^2} - 1 - a^2 = f(a) - a^2$ ✓，数值 $a = 0.5, 1, 1.7$ 全部吻合。）

考点：含绝对值的变限积分——按 t 与 x 的大小分段去掉绝对值再求导；偶函数把最小值“钉”在对称中心；第 (3) 问是“从恒等式反解 f ”，求导化微分方程后别忘了用 $x \rightarrow 0$ 的极限定常数。

第 30 题 证明：存在 ξ 使 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 2\xi$

设 f 在 $[0, 1]$ 可导， $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$ 。

证明：注意 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = (xf(x))'|_{x=\xi}$ 。构造

$$g(x) = xf(x) - x^2, \quad g(0) = 0, \quad g'(x) = xf'(x) + f(x) - 2x.$$

只需证 g 在 $(0,1)$ 内有零点（罗尔即可收尾）。

由 $\int_0^1 (f(x) - x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ 且 $f - x$ 连续：

- 若 $f(x) \equiv x$ ，则 $g \equiv 0$ ，任取 $\xi \in (0,1)$ 结论成立；
- 否则 $f - x$ 必既取正值又取负值：存在 $x_1, x_2 \in (0,1)$ 使 $f(x_1) > x_1$ 、 $f(x_2) < x_2$ ，于是

$$g(x_1) = x_1(f(x_1) - x_1) > 0, \quad g(x_2) = x_2(f(x_2) - x_2) < 0.$$

由零点定理，存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$ ： $g(x_0) = 0$ 。又 $g(0) = 0$ ， g 在 $[0, x_0]$ 上满足罗尔定理条件，故存在 $\xi \in (0, x_0) \subset (0,1)$ ：

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) + f(\xi) = 2\xi. \quad \blacksquare$$

考点：“导数型中值等式”先认出 $(xf)'$ 的原函数结构，再为罗尔凑端点值—— $\int_0^1 (f - x) = 0$ 的用途是保证 g 在内部变号，从而与 $g(0) = 0$ 凑出一对等值点。

经纬考研数学 · www.jingweimath.com