

经纬研选习题之

二元函数的微积分

1 验证极限是否存在: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4};$

2 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{xy^2 \sin xy}{x^2 + y^4}$

3 设 $z = u^2 \ln v, u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

4 设 $u = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$

5 已知 $(axy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2)dy$ 是某一函数 $f(x,y)$ 的全微分,
求 a, b ; 并求出这个函数 $f(x,y)$

6 设函数 $u = f(x, y, z)$ 有连续偏导数, $y = y(x), z = z(x)$ 分别由方程

$$e^{xy} - y = 0 \quad \text{和} \quad e^z - xz = 0 \quad \text{所确定, 求 } \frac{du}{dx}$$

7 设由方程组 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ 所确定的函数为 $x = x(z), y = y(z)$, 求 $\frac{dx}{dz}$ 和 $\frac{dy}{dz}$

8 设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ 验证 (1) } f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0; \text{ (2) 若 } f(1) = 0, f'(1) = 1 \text{ 求 } f(u)$$

9 已知函数 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(x, y) - 1 - 2x + 3y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, 求 $dz|_{(0,0)} = ?$

10 已知: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$, 且当 $x=0$ 时, $z(0, y) = \sin y$; 当 $y=0$ 时, $z(x, 0) = \cos x$, 求 $z(x, y) = ?$

11 (本题满分12分) 设函数 $f(x, y)$ 可微且满足

$$df(x, y) = -2xe^{-y}dx + e^{-y}(x^2 - y - 1)dy, f(0, 0) = 2$$

求 $f(x, y)$ 并求 $f(x, y)$ 的极值

12 已知函数 $f(x + y, x - y) = x^2 - y^2$ 对任何 x, y 都成立, 求 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$

13 求函数 $z = x^2y(1-x-y)$ 在直线 $x+y=3$, x 轴, y 轴围成的区域 D 上的最值。

14 求在斜边为 a 的一切直角三角形中, 有最大周长的直角三角形。

15 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆, 求原点到这椭圆的最短和最长距离。

16 计算: $\iint_D [|xy| + \sin(y^2x)] d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $|x| + |y| = 1$ 围成。

17 计算 $\iint_D (x + 1)^2 d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x + 2y\}$

18 函数 $f(x, y) = x^2 - 3x + y + 1$ 在平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ 上的平均值。

19 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有连续导数, 且

$$f(t) = \iint_{x^2 + y^2 \leq t^2} (x^2 + y^2) f(\sqrt{x^2 + y^2}) d\sigma + t^4; \text{ 求 } f(x) ?$$

20 设 $f(x, y)$ 连续函数, 且 $f(x, y) = \iint_D y f(u, v) du dv + x$;

其中 D 由 $y = \frac{1}{x}$, $y=2$, $x=1$ 围成; 求 $f(x, y)$

21 设 $f(x, y)$ 定义在 $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$ 上的连续函数, $f(0, 0) = 1$;

求:
$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - e^{-x^3}}$$

22 比较重积分大小:

设 $A = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) d\sigma$; $B = \iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^2 + y^2) d\sigma$; $C = \iint_{|x|+|y| \leq 1} (2|xy|) d\sigma$

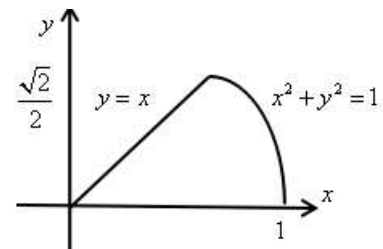
23 比较积分大小: 积分区域为 $D + \{(x, y) | ((x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2)\}$

$$I_1 = \iint_D \frac{x+y}{4} d\sigma; I_2 = \iint_D \sqrt{\frac{x+y}{4}} d\sigma; I_3 = \iint_D \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}} d\sigma;$$

24 设函数 $f(x,y)$ 连续, 则累次积分: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 r^2 \cos\theta f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$ 等于:

A: $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} xf(x,y)dy$; B: $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} yf(x,y)dy$;

C: $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} xf(x,y)dx$; D: $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xf(x,y)dx$;



25 交换累次积分的次序: $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$;

26 化极坐标为直角坐标: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$;

27 已知平面区域 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 4y, x^2 + y^2 \leq 4x\}$

计算: $\iint_D (x-y)^2 dx dy$

28 计算二重积分 $\iint_D y \, d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y = x^2$ 与 $y = 2 - x^2$ 所围成的平面区域。

29 求二重积分 $I = \iint_D (\sqrt{1 - x^2 - y^2} + x^3 \sin^2 y) d\sigma$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 = 1$ 的上半圆与 $x^2 + y^2 = 2y$ 的下半圆所围成的区域。

30 设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

计算 $\iint_D \frac{x \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$