

经纬研选（二元函数）解析

经纬数学

经纬考研数学

www.jingweimath.com

1 验证极限是否存在： $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$;

解：取方式 $x = ky^2$ ，则有 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \frac{k}{k^2 + 1}$ ；

所以极限不存在（因为k不同则值不同）

2 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{xy^2 \sin xy}{x^2 + y^4}$

方法1：由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\sin xy}{xy} = 1$ ； 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{xy^2 \sin xy}{x^2 + y^4} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^4}$ ；

$$\text{又 } 0 \leq \left| \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^4} \right| \leq |y^3|,$$

夹逼准则： $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{xy^2 \sin xy}{x^2 + y^4} = 0$.

3 设 $z = u^2 \ln v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + u^2 \cdot \frac{3}{v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2u \ln v \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + u^2 \cdot \left(-\frac{2}{v}\right), \text{ 代入 } u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y$$

4 设 $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\text{解: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} f_1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f_1 + \frac{1}{z} f_2$$

5 已知 $(axy^3 - y^2\cos x)dx + (1 + by\sin x + 3x^2y^2)dy$ 时候某一函数的全微分, 求 a, b

解: 解题思路: 利用全微分的知识, 建立方程求解

由题, 必存在函数 $f(x, y)$, 使得 $\frac{\partial f}{\partial x} = axy^3 - y^2\cos x; \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + by\sin x + 3x^2y^2$

又 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3axy^2 - 2y\cos x; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = by\cos x + 6xy^2$ 都连续, 因此

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 可得

$3axy^2 - 2y\cos x = by\cos x + 6xy^2$; 因为

所有 x, y 都满足, 所以必须 $3a = 6, a = 2; b = -2$

6 设函数 $u = f(x, y, z)$ 有连续偏导数, $y = y(x), z = z(x)$ 分别由方程

$$e^{xy} - y = 0 \quad \text{和} \quad e^z - xz = 0 \quad \text{所确定, 求} \quad \frac{du}{dx}$$

解:
$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx} \quad (1)$$

两个方程分别两边对 x 求导:

$$e^{xy} \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) - \frac{dy}{dx} = 0; \quad \text{可得: } \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy};$$

$$e^z \frac{dz}{dx} - z - x \frac{dz}{dx} = 0; \quad \text{可得} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{xz - x} \quad \text{代入 (1) 式即可}$$

7 设由方程组 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ 所确定的函数为 $x = x(z), y = y(z)$, 求 $\frac{dx}{dz}$ 和 $\frac{dy}{dz}$

解: 方程组两边对 z 求导: $\begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 = 0 \\ 2x \frac{dx}{dz} + 2y \frac{dy}{dz} + 2z = 0 \end{cases}$ 得非齐次线性方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} = -1 \\ 2x \frac{dx}{dz} + 2y \frac{dy}{dz} = 2z \end{cases} \quad \text{解得} \quad \frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y}; \quad \frac{dy}{dz} = \frac{z-x}{x-y};$$

8 设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ 验证 (1) } f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0; \text{ (2) 若 } f(1) = 0, f'(1) = 1 \text{ 求 } f(u)$$

解: 1) 记 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z_x = f'(r) \frac{x}{r}$, $z_{xx} = f''(r) \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \frac{y^2}{r^3}$;

同理 $z_{yy} = f''(r) \frac{y^2}{r^2} + f'(r) \frac{x^2}{r^3}$, 代入可知 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

2) 方程两边乘 u : $(uf'(u))' = 0$, 故 $uf'(u) = C_1$; 代入 $f'(1) = 1$ 得 $C_1 = 1$,

$f'(u) = \frac{1}{u}$, $f(u) = \ln u + C_2$; 代入 $f(1) = 0$ 得 $C_2 = 0$ 。故 $f(u) = \ln u$ 。

9 已知函数 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(x, y) - 1 - 2x + 3y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, 求 $dz|_{(0,0)} = ?$

解: 由极限式子可得: $f(x, y) - 1 - 2x + 3y = o(\rho)$; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

又 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续, 则 $f(0, 0) = 1$;

所以上式为: $f(x, y) - f(0, 0) = 2x - 3y + o(\rho)$, 由此在 $(0, 0)$ 点可微

且由定义: $dz|_{(0,0)} = 2dx - 3dy$

10 已知: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$, 且当 $x=0$ 时, $z(0, y) = \sin y$; 当 $y=0$ 时, $z(x, 0) = \cos x$, 求 $z(x, y) = ?$

解: (常数变异法、待定系数法)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 \text{ 两边先对 } y \text{ 求积分, 得: } \frac{\partial z}{\partial x} = y + \varphi(x) \text{ --- (1);}$$

由 $z(x, 0) = \cos x$, 得 $z_x(x, 0) = -\sin x$, 所以 $\varphi(x) = -\sin x$;

代入 (1) 式后在对 x 积分:

$$z(x, y) = \int (y - \sin x) dx = xy + \cos x + g(y) \text{ --- (2);}$$

由 $z(0, y) = \sin y$ 得: $g(y) = \sin y - 1$;

由此得到: $z(x, y) = xy + \cos x + \sin y - 1$.

11 (本题满分12分) 设函数 $f(x, y)$ 可微且满足

$$df(x, y) = -2xe^{-y}dx + e^{-y}(x^2 - y - 1)dy, f(0, 0) = 2$$

求 $f(x, y)$ 并求 $f(x, y)$ 的极值

解：由全微分定义： $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ ，因此有：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-y}, \quad (1) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-y}(x^2 - y - 1) \quad (2)$$

(1) 式两边对 x 积分， $\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int -2xe^{-y} dx$ 得；

$$f(x, y) = -x^2e^{-y} + \varphi(y)$$

对此式两边对 y 求导, 并由 (2) 可得：

$$f(x, y) = x^2e^{-y} + \varphi'(y) = \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-y}(x^2 - y - 1), \quad \text{则有}$$

$$\varphi'(y) = e^{-y}(-y - 1), \quad \varphi(y) = ye^{-y} + 2e^{-y} + c;$$

则 $f(x, y) = -x^2e^{-y} + ye^{-y} + 2e^{-y} + c$ ，由 $f(0, 0) = 2$ ，得 $c = 0$ ；

满足条件的函数为： $f(x, y) = -x^2e^{-y} + ye^{-y} + 2e^{-y}$

12 已知函数 $f(x+y, x-y) = x^2 - y^2$ 对任何 x, y 都成立, 求 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

解: 此类问题要先化简:

令 $x+y=u, x-y=v$; 得: $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$,

然后求出 $f(x+y, x-y) = f(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = uv$; 也即

$f(x, y) = xy$, 再求 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + y$;

13 求函数 $z = x^2y(1-x-y)$ 在直线 $x+y=3$, x 轴, y 轴围成的区域 D 上的最值。

解：先求在 D 内的驻点： $\frac{\partial z}{\partial x} = xy(2-3x-2y) = 0$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2(1-x-2y) = 0$;

可得 D 内的唯一驻点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $z(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{64}$;

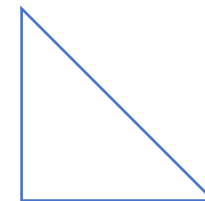
在 D 的边界 $x=0$ ($0 \leq y \leq 3$), 以及 $y=0$ ($0 \leq x \leq 3$) 上, 都有 $z(x,y)=0$;

在边界 $x+y=3$ 上, $z(x,y)=2(x^3-3x^2)$ ($0 \leq x \leq 3$);

令 $g(x)=2(x^3-3x^2)$, 可得 $x=2$ 为其驻点;

比较 $g(2)=-8$; 比较 D 内驻点以及 D 的边界, 可得函数的最大值为 $\frac{1}{64}$, 最小值为 -8 .

14 求在斜边为 a 的一切直角三角形中，有最大周长的直角三角形。



解：设直角三角形两直角边长度分别为 x, y ，则问题变成求

周长： $s(x, y) = x + y + a$ ($0 < x, y < a$)，在约束条件 $x^2 + y^2 = a^2$ 下的最大值

拉格朗日函数： $F(x, y, \lambda) = x + y + a + \lambda(x^2 + y^2 - a^2)$

$$F_x = 0; F_y = 0; F_\lambda = 0;$$

得 $x = y = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ ，等腰三角形时。 $s(\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\sqrt{2}a}{2}) = (1 + \sqrt{2})a$ 即为最大值！

注：这是知道最大值存在的实际问题，驻点在区域内部且唯一

15 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最短和最长距离。

解：这里的约束条件是椭圆曲线，由两个方程生成：
$$\begin{cases} z - x^2 - y^2 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

为了求解方便，到原点的距离可以用函数： $d = x^2 + y^2 + z^2$ 代替；

可以把两个约束条件化为一个： $1 - x - y - x^2 - y^2 = 0$ ，目标函数化为 $d = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2$

拉格朗日条件函数： $L(x, y) = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 + \lambda(1 - x - y - x^2 + y^2)$ ；

$$L_x = 4x + 2y - 2 - \lambda(2x + 1) = 0, \quad L_y = 4y + 2x - 2 = \lambda(2y + 1) = 0。$$

两式相减得 $(x - y)(1 - \lambda) \cdot 2 = 0$ 。

若 $\lambda = 1$ ：由第一式 $x + y = \frac{3}{2}$ ，代入约束得 $x^2 + y^2 = -\frac{1}{2}$ ，无解；故 $x = y$ 。

代入约束： $2x^2 + 2x = 1$ ， $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ 。当 $x = y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 时 $z = 2 - \sqrt{3}$ ， $d^2 = 9 - 5\sqrt{3}$ （最短）；

当 $x = y = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 时 $z = 2 + \sqrt{3}$ ， $d^2 = 9 + 5\sqrt{3}$ （最长）。

16 计算: $\iint_D [|xy| + \sin(y^2x)] d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $|x|+|y|=1$ 围成。

解: 由奇偶性, $\iint_D [|xy|] d\sigma = 4 \iint_{D_1} xy d\sigma = 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy dy = \frac{1}{6};$

式子里的正弦函数为奇函数, 所以在对称区间积分为 0;

17 计算 $\iint_D (x+1)^2 d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x + 2y\}$

解: $\iint_D (x+1)^2 d\sigma = \iint_D (x^2 + 2x + 1) d\sigma$;

由轮转对称性 $\iint_D x^2 d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta+2\sin\theta} r^2 r dr = 3\pi$;

$\iint_D 2x d\sigma = 2 \bar{x} S = 2 \iint_D d\sigma = 4\pi$ (形心算法: $\bar{x} = \frac{\iint_D x d\sigma}{S} = 1$);

或者: $\iint_D x d\sigma = \iint_D [(x-1) + 1] d\sigma = \iint_D d\sigma = 2\pi$ (前一项在 D 上是奇函数!)

$\iint_D d\sigma = 2\pi$ $\{(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$; 所以原式 $= 9\pi$.

18 求函数 $f(x, y) = x^2 - 3x + y + 1$ 在平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ 上的平均值。

解： **平均值** $= \frac{\iint_D f(x, y) d\sigma}{S}; \quad S = \pi a^2$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D (x^2 - 3x + y + 1) dx dy = \iint_D (x^2 + 1) dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy + \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr + \pi a^2 = \frac{\pi a^4}{4} + \pi a^2$$

所以平均值为 $\frac{a^2}{4} + 1$

19 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有连续导数, 且

$$f(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} (x^2 + y^2) f(\sqrt{x^2 + y^2}) d\sigma + t^4; \text{ 求 } f(x) ?$$

$$\text{解: } f(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t (r^2 f(r) r dr) = 2\pi \int_0^t r^3 f(r) dr + t^4$$

两边求导: $f'(t) = 2\pi t^3 f(t) + 4t^3$ (一阶线性微分方程, $f(0) = 0$);

$$f(x) = \frac{2}{\pi} (e^{\frac{\pi}{2}x^4} - 1).$$

20 设 $f(x, y)$ 连续函数, 且 $f(x, y) = \iint_D yf(u, v)dudv + x$;

其中 D 由 $y = \frac{1}{x}$, $y=2$, $x=1$ 围成; 求 $f(x, y)$

解: 记 $\iint_D f(x, y)d\sigma=A$; 则有 $f(x, y) = yA + x$

两边同时二重积分, $A = A \iint_D yd\sigma + \iint_D xd\sigma$; $A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}$; $A = \frac{1}{2}$

可得 $f(x, y) = \frac{y}{2} + x$

21 设 $f(x, y)$ 定义在 $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$ 上的连续函数, $f(0,0) = 1$;

求: $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - e^{-x^3}}$

解: (交换积分次序) $\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du = - \int_0^{x^2} dt \int_{\sqrt{t}}^x f(t, u) du = - \int_0^x du \int_0^{u^2} f(t, u) dt$

原式 = $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^x [\int_0^{u^2} f(t, u) dt] du}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^{x^2} f(t, x) dt}{-3x^2}$ (利用积分中值定理)

= $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 f(\xi, x)}{-3x^2} = -\frac{1}{3} f(0,0) = -\frac{1}{3}$ ($0 < \xi < x^2$)

22 比较重积分大小:

$$\text{设 } A = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) d\sigma; \quad B = \iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^2 + y^2) d\sigma; \quad C = \iint_{|x|+|y| \leq 1} (2|xy|) d\sigma$$

解: 解析: 函数相同比较区域; 区域相同比较函数)

A, B的函数相同且都为正, A的积分区域包含了B的, 所以 $B \leq A$;

B, C的积分区域相同, 但是 $2|xy| \leq x^2 + y^2$; 所以 $C \leq B$ 。

23 比较积分大小：积分区域为 $D = \{(x, y) | ((x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2)\}$

$$I_1 = \iint_D \frac{x+y}{4} d\sigma ; I_2 = \iint_D \sqrt{\frac{x+y}{4}} d\sigma ; I_3 = \iint_D \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}} d\sigma ;$$

解：证明 $\frac{x+y}{4} \leq 1$ 即可； $x+y=4$ 和区域 D （圆）相交于唯一点（切点） $(2, 2)$ ；

同时 D 与 $x+y=0$ 相交于唯一点 $(0,0)$ ，所以区域 D 介于 $x+y=4$ 和 $x+y=0$ 之间；

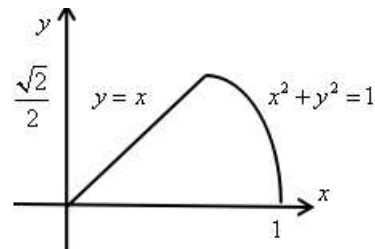
由此在区域 D 内 $0 \leq \frac{x+y}{4} \leq 1$ ，即可得： $I_1 \leq I_2 \leq I_3$ 。

24 (交换积分限---常考题目)

设函数 $f(x,y)$ 连续, 则累次积分: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 r^2 \cos\theta f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$ 等于:

$$A: \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} xf(x,y)dy; \quad B: \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} yf(x,y)dy;$$

$$C: \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} xf(x,y)dx; \quad D: \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xf(x,y)dx;$$



解: 求解这类问题关键是要根据题目确定积分区域 D 是由哪些曲线组成,

并画出积分区域 D 的草图; C

25 交换累次积分的次序: $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$

解: 原式 = $\int_0^{x_0} dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_{x_0}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

$$x_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

26 化极坐标为直角坐标: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho d\rho;$

解 原式 = $\int_{-1}^0 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

27 已知平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4y, x^2 + y^2 \leq 4x\}$

计算: $\iint_D (x - y)^2 dx dy$

$$\text{解: } = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{4\sin\theta} r^2 (\cos\theta - \sin\theta)^2 r dr = 128 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\theta (\cos\theta - \sin\theta)^2 d\theta$$

$$= 12\pi - \frac{112}{3}$$

28 计算二重积分 $\iint_D y \, d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y = x^2$ 与 $y = 2 - x^2$ 所围成的平面区域

$$\text{解: } = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} y dy = \int_0^1 [(2-x^2)^2 - x^4] dx = \frac{8}{3}$$

29 求二重积分 $I = \iint_D (1 - x^2 - y^2 + x^3 \sin^2 y) d\sigma$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 = 1$ 的上半圆与 $x^2 + y^2 = 2y$ 的下半圆所围成的区域

$$\text{解: } = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} (1 - r^2) r dr + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r dr = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

30 设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

$$\text{计算 } \iint_D \frac{x \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$$

$$\text{解: } = \frac{1}{2} \left[\iint_D \frac{x \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy + \iint_D \frac{y \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy \right] = \frac{1}{2} \iint_D \cos(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \cos r \cdot r dr = \pi(2\sin 2 + \cos 2 - \sin 1 - \cos 1)$$

The End