

经纬研选（五）·多元微积分（数一）

题目卷 共 27 题，涵盖多元函数微分学的几何应用、方向导数、三重积分、第一类/第二类曲线积分、第一类/第二类曲面积分。

建议先独立完成，再对照详解卷批改。

第 1 题

求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线及法平面。

第 2 题

求旋转椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 上点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面夹角的余弦。

第 3 题

试证曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) 上任何点处的切平面在三个坐标轴上的截距之和等于 a 。

第 4 题

函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处沿 $(1, 0)$ 方向的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial l} = 1$ ，证明函数在 $(0, 0)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 不存在。

第 5 题

函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处，下面哪个正确？

第 6 题

设 $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ，点 $P_0(1, 1)$ ，求：（1） $f(x, y)$ 在 P_0 处增加最快的方向以及沿这个方向的方向导数；（2） $f(x, y)$ 在 P_0 处变化率为零的方向。

第 7 题

计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x \, dx dy dz$ ，其中 Ω 为三个坐标面以及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。

第 8 题

设 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成的曲面与平面 $z = 2$ 所围成的区域，求 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dV$ 。

第 9 题

计算 $I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV$, 其中 Ω 由 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1, z \geq 1, y \geq 0$ 所确定。

第 10 题

计算 $\iiint_{\Omega} (ax + by + cz)^2 dV$, 其中 Ω 为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

第 11 题

计算半径为 R 、中心角为 2α 的圆弧 L 对于其对称轴的转动惯量 I (设线密度 $\mu = 1$)。

第 12 题

设曲线 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 求第一类曲线积分 $\int_L (x+y)^2 ds$ 。

第 13 题

计算第二类曲线积分 $\int_L \sin^2 x dx + (x^2 - 1)y dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 从点 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段。

第 14 题

计算 $\int_L 2xy dx + x^2 dy$, 其中 L 为抛物线 $y = x^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧。

第 15 题

计算 $\oint_L x^2 y dx - xy^2 dy$, 其中 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 。

第 16 题

计算 $\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为分段光滑且不经过原点的连续封闭曲线, L 的方向为逆时针方向。

第 17 题

计算第二类线积分 $\int_L y e^{y^2} dx + (x e^{y^2} + 2xy^2 e^{y^2}) dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的一段弧。

第 18 题

求解方程 $(5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy = 0$ 的通解。

第 19 题

设平面曲线 L 是从点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi, \pi)$ 的半圆弧, 试求该平面内一质点在变力 $\vec{F} = (e^x \sin y - 4y)\vec{i} + (e^x \cos y - 1)\vec{j}$ 作用下, 沿圆弧 L 从 O 移动到 A 所做的功。

第 20 题

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(1) = f'(1) = 1$; 且 $\oint_L \left[\frac{y^2}{x} + xf\left(\frac{y}{x}\right) \right] dx + \left[y - xf'\left(\frac{y}{x}\right) \right] dy = 0$, 其中 L 是右半平面 $x > 0$ 内任一光滑封闭曲线, 求 $f(x)$ 。

第 21 题

计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z \, dxdy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分。

第 22 题

计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (z^2 + x) \, dydz - z \, dxdy$, 其中 Σ 是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 介于平面 $z = 0$ 与 $z = 4$ 之间的部分的下侧。

第 23 题

计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \, dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 。

第 24 题

计算曲线积分 $I = \oint_L y^2 \, dx + z^2 \, dy + x^2 \, dz$, 其中 L 为曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases} (z \geq 0)$, 从 z 轴正向看取逆时针方向。

第 25 题

求八分之一球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ 的边界曲线的质心 (设密度为 1)。

第 26 题

计算 $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) \, dS$, 其中 Σ 为圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所截的部分。

第 27 题

设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$ 的外侧, 求曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz \, dxdy$ 。