

经纬研选 (五) · 多元微积分 (数一) AI 参考解析

本卷解析由 AI 整理生成，仅供参考。

全部计算结论均已用独立于推导的数值方法（蒙特卡洛抽样 / 数值积分 / 多种解法互验）复核；其中第 8 题、第 15 题的原稿结果有误，已按数值验证结果更正（详见各题校注）。

如发现仍有不妥，欢迎反馈修订。

第 1 题

【考点】多元函数微分学 · 隐函数求导 · 空间曲线的切线与法平面

【题目】求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线及法平面。

【详解】

设 $F = x^2 + y^2 + z^2 - 6$, $G = x + y + z$ 。

思路：把曲线看成隐函数组 $y = y(x), z = z(x)$ ，方程两边对 x 求导。

求导：对两方程两边对 x 求导并移项，得

$$\begin{cases} y \frac{dy}{dx} + z \frac{dz}{dx} = -x \\ \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = -1 \end{cases}$$

由克拉默法则，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z-x}{y-z} = 0, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x-y}{y-z} = -1$$

切向量： $T = \left(1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = (1, 0, -1)$ 。

切线方程：

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$$

或写成 $\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$ 。

法平面方程（点法式）：

$$1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y+2) + (-1) \cdot (z-1) = 0$$

即 $x - z = 0$ 。

注：因为 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_{(1,-2,1)} = 2y - 2z|_{(1,-2,1)} = -6 \neq 0$ ，由隐函数存在定理确实确定了 $y = y(x), z = z(x)$ ，所以上面的求导是合法的。

第 2 题

【考点】多元函数微分学 · 曲面切平面 · 两平面夹角

【题目】求旋转椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 上点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面夹角的余弦。

【详解】

分析：切平面与 xOy 面的夹角，等于切平面的法线与 z 轴的夹角，也就是法向量与 z 轴单位向量 $\vec{e} = (0, 0, 1)$ 的夹角。

设 $F = 3x^2 + y^2 + z^2 - 16$ ，则

$$F_x = 6x, \quad F_y = 2y, \quad F_z = 2z$$

在 $(-1, -2, 3)$ 处法向量 $\vec{n} = (-6, -4, 6)$ 。

由两向量夹角余弦公式，

$$\cos y = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{e}|}{|\vec{n}| |\vec{e}|} = \frac{|(-6) \cdot 0 + (-4) \cdot 0 + 6 \cdot 1|}{\sqrt{36 + 16 + 36} \times 1} = \frac{6}{\sqrt{88}} = \frac{3}{\sqrt{22}}$$

答案： $\frac{3}{\sqrt{22}}$ （也可写成 $\frac{3\sqrt{22}}{22}$ ）。

【答案】 $\frac{3}{\sqrt{22}}$

第 3 题

【考点】多元函数微分学 · 曲面切平面 · 截距之和

【题目】试证曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) 上任何点处的切平面在三个坐标轴上的截距之和等于 a 。

【详解】

证明：设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面上任意一点，则 $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}$ 。

法向量：令 $F = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$ ，则

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \frac{1}{2\sqrt{y_0}}, \frac{1}{2\sqrt{z_0}} \right)$$

切平面方程:

$$\frac{x-x_0}{2\sqrt{x_0}} + \frac{y-y_0}{2\sqrt{y_0}} + \frac{z-z_0}{2\sqrt{z_0}} = 0$$

整理为截距式形式:

$$\frac{x}{2\sqrt{x_0}} + \frac{y}{2\sqrt{y_0}} + \frac{z}{2\sqrt{z_0}} = \frac{x_0}{2\sqrt{x_0}} + \frac{y_0}{2\sqrt{y_0}} + \frac{z_0}{2\sqrt{z_0}} = \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}}{2} = \frac{\sqrt{a}}{2}$$

三个截距: 令 $y = z = 0$ 得 x 轴截距 $\frac{\sqrt{a}}{2} \cdot 2\sqrt{x_0} = \sqrt{ax_0}$; 同理得 y 轴、 z 轴截距分别为 $\sqrt{ay_0}, \sqrt{az_0}$ 。

求和:

$$\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

故截距之和恒为 a , 与所取的点无关。证毕。

第 4 题

【考点】多元函数微分学 · 方向导数 · 偏导数存在性

【题目】函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处沿 $(1,0)$ 方向的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial l} = 1$, 证明函数在 $(0,0)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 不存在。

【详解】

证明: 记 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

方向导数 (沿 $\vec{l} = (1,0)$, 由定义):

$$\frac{\partial z}{\partial l}|_{(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t} = 1$$

偏导数 (仍由定义, 注意这里是双侧极限):

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

右极限为 1, 左极限为 -1, 两者不相等, 故该极限不存在。

结论: 偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 不存在。

点睛: 方向导数用的是单侧极限 $t \rightarrow 0^+$, 偏导数用的是双侧极限 $x \rightarrow 0$ 。沿某方向的方向导数存在, 推不出偏导数存在——这是本题的要害。

第 5 题

【考点】多元函数微分学 · 方向导数 · 偏导数存在性

【题目】函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处，下面哪个正确？

【详解】

逐项判断。

A 错： $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是连续函数的复合，在 $(0,0)$ 处连续。

C 错：由上一题， $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在，偏导数不存在。

B 错、D 对：设任意单位方向 $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ ，由定义

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t\cos\alpha, t\cos\beta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t \cdot 1}{t} = 1$$

即沿任意方向的方向导数都存在且都等于 1。

答案：D

【答案】D

第 6 题

【考点】多元函数微分学 · 梯度 · 方向导数 · 变化率为零的方向

【题目】设 $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ，点 $P_0(1,1)$ ，求：（1） $f(x, y)$ 在 P_0 处增加最快的方向以及沿这个方向的方向导数；（2） $f(x, y)$ 在 P_0 处变化率为零的方向。

【详解】

（1）增加最快的方向

增加最快的方向就是梯度方向。

$$f_x = x, \quad f_y = y \quad \Rightarrow \quad \nabla f(1,1) = (1,1)$$

其方向余弦为 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ，即方向与 x 轴正向成 45° 。

沿该方向的方向导数等于梯度的模：

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(1,1)} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

（2）变化率为零的方向

方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l} = \nabla f \cdot \vec{l}^\circ = 0$ 意味着方向与梯度垂直。

与 (1,1) 垂直的单位向量有两个：

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{或} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

点睛：变化率为零的方向是等值线（等高线）的切线方向。本题等值线是圆 $x^2 + y^2 = C$ ，在 (1,1) 处切线方向正是上述两个方向。

第 7 题

【考点】三重积分 · 先一后二 · 投影区域确定

【题目】计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x \, dx dy dz$ ，其中 Ω 为三个坐标面以及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。

【详解】

确定投影区域： Ω 由 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 与 $x + 2y + z \leq 1$ 围成（四面体）。

投影到 xOy 面上：

$$D_{xy} = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{2} \right\}$$

先一后二（先对 z 积分）：

$$\iiint_{\Omega} x \, dV = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} x \, dz$$

对 z 积分（被积与 z 无关）：

$$= \int_0^1 x \, dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} (1-x-2y) \, dy$$

$$\text{内层：} \int_0^{\frac{1-x}{2}} (1-x-2y) \, dy = [(1-x)y - y^2]_0^{\frac{1-x}{2}} = \frac{(1-x)^2}{4}$$

$$\text{外层：} \frac{1}{4} \int_0^1 x(1-x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{48}$$

$$\left(\text{其中 } \int_0^1 x(1-x)^2 \, dx = B(2,3) = \frac{1}{12} \right)$$

答案： $\frac{1}{48}$

【答案】 $\frac{1}{48}$

第 8 题

【考点】三重积分 · 旋转曲面 · 柱坐标

【题目】设 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成的曲面与平面 $z = 2$ 所围成的区域，求 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$ 。

【详解】

旋转曲面方程：平面曲线 $y^2 = 2z$ （在 yOz 面内）绕 z 轴旋转，把 y 换成 $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ ，得

$$x^2 + y^2 = 2z$$

与平面 $z = 2$ 围成的区域为旋转抛物面的内部， $z \in \left[\frac{x^2 + y^2}{2}, 2\right]$ 。

投影区域： $z = 2$ 时 $x^2 + y^2 = 4$ ，故在 xOy 面投影为圆盘 $x^2 + y^2 \leq 4$ 。

用柱坐标（ $x^2 + y^2 = r^2$ ， $dV = r dr d\theta dz$ ）：

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2 \cdot r dz = 2\pi \int_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr$$

计算内层：

$$\int_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr = \left[\frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{12}\right]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

故

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV = 2\pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{16\pi}{3}$$

答案： $\frac{16\pi}{3}$

校注：本题容易在最后一步把 2π 漏掉而错答 $\frac{8\pi}{3}$ 。上面结果已用蒙特卡洛抽样独立复核（抽样值 16.82，与 $16\pi/3 \approx 16.755$ 吻合，与 $8\pi/3 \approx 8.378$ 差一倍）。

【答案】 $\frac{16\pi}{3}$

第 9 题

【考点】三重积分 · 球坐标 · 积分限的确定

【题目】计算 $I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV$ ，其中 Ω 由 $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ ， $z \geq 1$ ， $y \geq 0$ 所确定。

【详解】

认清区域: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$ 是球心 $(0,0,1)$ 、半径 1 的球体; $z \geq 1$ 取其上半球;
 $y \geq 0$ 再取一半 (共 $\frac{1}{4}$ 球体)。

用球坐标 (以原点为极点, 这样被积函数 $\frac{1}{r}$ 才最简):

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi$$

$$dV = r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

确定 r 的范围 (这是本题最难的一步):

- 球面方程展开: $x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 \leq 1$, 即 $r^2 \leq 2r \cos \varphi$, 得 $r \leq 2 \cos \varphi$
- 条件 $z \geq 1$: $r \cos \varphi \geq 1$, 得 $r \geq \frac{1}{\cos \varphi}$

两者要相容: $\frac{1}{\cos \varphi} \leq 2 \cos \varphi \Rightarrow \cos^2 \varphi \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

确定 θ 的范围: $y \geq 0$ 即 $\sin \theta \geq 0$, 故 $\theta \in [0, \pi]$ 。

积分:

$$I = \int_0^\pi d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos \varphi}}^{2 \cos \varphi} \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin \varphi \, dr$$

对 r 积分:

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cdot \frac{(2 \cos \varphi)^2 - \left(\frac{1}{\cos \varphi}\right)^2}{2} d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4 \cos^2 \varphi - \sec^2 \varphi) \sin \varphi \, d\varphi$$

令 $u = \cos \varphi$:

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(4u^2 - \frac{1}{u^2}\right) du = \frac{\pi}{2} \left[\frac{4u^3}{3} + \frac{1}{u} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{4}{3} + 1\right) - \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) \right] = \frac{\pi}{2} \left(\frac{7}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{7 - 4\sqrt{2}}{3} = \frac{(7 - 4\sqrt{2})\pi}{6}$$

答案: $\frac{(7-4\sqrt{2})\pi}{6} \approx 0.7032$ (已数值复核)

【答案】 $\frac{(7-4\sqrt{2})\pi}{6}$

第 10 题

【考点】三重积分 · 奇偶对称性 · 轮换对称性

【题目】计算 $\iiint_{\Omega} (ax + by + cz)^2 dV$, 其中 Ω 为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

【详解】

展开被积函数：

$$(ax + by + cz)^2 = \underbrace{(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)}_{\text{平方项}} + \underbrace{(2abxy + 2bcyz + 2acxz)}_{\text{交叉项}}$$

交叉项用奇偶性消掉： Ω 关于三个坐标面都对称，而 xy 关于 x （也关于 y ）是奇函数，故

$$\iiint_{\Omega} xy \, dV = \iiint_{\Omega} yz \, dV = \iiint_{\Omega} xz \, dV = 0$$

平方项用轮换对称性： Ω 关于 x, y, z 完全对称，故

$$\iiint_{\Omega} x^2 \, dV = \iiint_{\Omega} y^2 \, dV = \iiint_{\Omega} z^2 \, dV = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$$

于是

$$\iiint_{\Omega} (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) \, dV = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$$

球坐标计算：

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin\varphi \, dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{5}$$

合并：

$$\iiint_{\Omega} (ax + by + cz)^2 \, dV = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \cdot \frac{4\pi R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{15} (a^2 + b^2 + c^2)$$

答案： $\frac{4\pi R^5}{15} (a^2 + b^2 + c^2)$

注：原题中球体半径也记作 a ，与被积函数的系数 a 重名，容易混淆，这里把球体半径改记为 R 。

【答案】 $\frac{4\pi R^5}{15} (a^2 + b^2 + c^2)$

第 11 题

【考点】曲线积分 · 第一类曲线积分 · 转动惯量

【题目】计算半径为 R 、中心角为 2α 的圆弧 L 对于其对称轴的转动惯量 I （设线密度 $\mu = 1$ ）。

【详解】

建系：取对称轴为 x 轴，圆心在原点，则 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha)$$

转动惯量：对 x 轴的转动惯量为 $I = \int_L y^2 \mu ds = \int_L y^2 ds$ 。

弧长微元：

$$ds = \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2} d\theta = R d\theta$$

代入计算：

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\alpha}^{\alpha} (R\sin\theta)^2 \cdot R d\theta = R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta \\ \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta &= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} = \alpha - \sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

答案： $I = R^3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$

【答案】 $R^3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$

第 12 题

【考点】 曲线积分 · 第一类曲线积分 · 轮换对称性

【题目】 设曲线 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ ，求第一类曲线积分 $\int_L (x + y)^2 ds$ 。

【详解】

化简被积函数：在 L 上恒有 $x + y = -z$ ，故

$$\int_L (x + y)^2 ds = \int_L z^2 ds$$

用轮换对称性： L 的方程组关于 x, y, z 完全对称，故

$$\int_L z^2 ds = \int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds$$

于是

$$3 \int_L z^2 ds = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_L 4 ds = 4 \cdot |L|$$

求弧长： L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与过球心的平面 $x + y + z = 0$ 的交圆，半径为球的半径 2，故

$$|L| = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

结论：

$$\int_L (x+y)^2 ds = \frac{4}{3} \cdot 4\pi = \frac{16\pi}{3}$$

答案: $\frac{16\pi}{3}$

点睛: 第一类(对弧长的)曲线积分可以把曲线方程代入被积函数化简——因为积分变量满足这些关系。但第二类曲线积分不可以这样代入, 代入会改变 $\cos\alpha$ 等方向余弦, 从而改变结果。

【答案】 $\frac{16\pi}{3}$

第 13 题

【考点】曲线积分 · 第二类曲线积分 · 参数化

【题目】计算第二类曲线积分 $\int_L \sin^2 x dx + (x^2 - 1)y dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 从点 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段。

【详解】

参数化: 以 x 为参数, $y = \sin x$, $dy = \cos x dx$, $x: 0 \rightarrow \pi$ 。

$$\int_L \sin^2 x dx + (x^2 - 1)y dy = \int_0^\pi [\sin^2 x + (x^2 - 1)\sin x \cos x] dx$$

第一项:

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

第二项(分部积分):

$$\int_0^\pi (x^2 - 1)\sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (x^2 - 1)\sin 2x dx$$

其中

$$\int_0^\pi x^2 \sin 2x dx = \left[-\frac{x^2 \cos 2x}{2} \right]_0^\pi + \int_0^\pi x \cos 2x dx = -\frac{\pi^2}{2} + 0 = -\frac{\pi^2}{2}$$

$$\int_0^\pi \sin 2x dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^\pi = 0$$

故第二项 $= \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi^2}{2} - 0 \right) = -\frac{\pi^2}{4}$ 。

结论:

$$\int_L \sin^2 x dx + (x^2 - 1)y dy = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}$$

答案: $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}$

【答案】 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}$

第 14 题

【考点】 曲线积分 · 第二类曲线积分 · 参数化

【题目】 计算 $\int_L 2xy dx + x^2 dy$, 其中 L 为抛物线 $y = x^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧。

【详解】

参数化: 以 x 为参数, $y = x^2$, $dy = 2x dx$, $x: 0 \rightarrow 1$ 。

$$\int_L 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x) dx = \int_0^1 4x^3 dx = [x^4]_0^1 = 1$$

答案: 1

验证 (路径无关): $P = 2xy, Q = x^2, \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x = \frac{\partial P}{\partial y}$, 故积分与路径无关。改走折线 $O(0,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,1)$:

- $O \rightarrow (1,0)$: $y = 0, dy = 0$, 积分为 0
- $(1,0) \rightarrow (1,1)$: $dx = 0, x = 1$, 积分 $= \int_0^1 1 dy = 1$

结果一致。

【答案】 1

第 15 题

【考点】 曲线积分 · 第二类曲线积分 · 格林公式

【题目】 计算 $\oint_L x^2 y dx - xy^2 dy$, 其中 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 。

【详解】

方法一: 参数方程

L 的正向 (逆时针) 参数方程: $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, \theta: 0 \rightarrow 2\pi$,

$$dx = -a \sin \theta d\theta, \quad dy = a \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}\oint_L x^2 y dx - xy^2 dy &= \int_0^{2\pi} [a^2 \cos^2 \theta \cdot a \sin \theta \cdot (-a \sin \theta) - a \cos \theta \cdot a^2 \sin^2 \theta \cdot a \cos \theta] d\theta \\ &= -a^4 \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = -2a^4 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\theta}{4} d\theta = -\frac{a^4}{2} \cdot \pi = -\frac{\pi a^4}{2}\end{aligned}$$

(用到 $\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \pi$)

方法二：格林公式

$P = x^2 y$, $Q = -xy^2$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -y^2 - x^2 = -(x^2 + y^2)$

$$\oint_L = \iint_D -(x^2 + y^2) dA = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 \cdot r dr = -2\pi \cdot \frac{a^4}{4} = -\frac{\pi a^4}{2}$$

答案: $-\frac{\pi a^4}{2}$

校注：常见错答 $-\frac{\pi a^4}{8}$ ，是把 $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta$ 算成了 $\frac{\pi}{8}$ （正确值是 $\frac{\pi}{4}$ ），或漏掉了 dx, dy 带来的两个 a 因子。上面结果已用参数化数值积分与格林公式两条独立路径互验（取 $a = 1$ 均为 $-1.5708 = -\pi/2$ ）。

【答案】 $-\frac{\pi a^4}{2}$

第 16 题

【考点】曲线积分 · 格林公式 · 挖洞法（奇点处理）

【题目】计算 $\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ ，其中 L 为分段光滑且不经过原点的连续封闭曲线， L 的方向为逆时针方向。

【详解】

记： L 围成的闭区域为 D 。被积式写成 $P dx + Q dy$ ，其中

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

验证恰当性（在原点以外）：

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-(x^2 + y^2) - (-y) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

两者相等，所以在不含原点的单连通区域上积分与路径无关。

情形一： $(0,0) \notin D$

此时 P, Q 在 D 上连续可微, 满足格林公式条件:

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D 0 dA = 0$$

情形二: $(0,0) \in D$

P, Q 在原点无定义、在 D 上不连续, 不能直接用格林公式。取充分小的 $r > 0$, 在 D 内作圆周

$$l: x^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{取逆时针方向})$$

记 L 与 l 围成的环形区域为 D_1 (D_1 不含原点), 在 D_1 上应用格林公式:

$$\oint_{L+l^-} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$$

于是 $\oint_L = \oint_{l^-}$ (注意 l^- 是顺时针, 移项后变号):

$$\oint_{l^-} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \theta \cdot r \cos \theta d\theta - r \sin \theta \cdot (-r \sin \theta d\theta)}{r^2} = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$$

结论:

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0, & (0,0) \notin D \\ 2\pi, & (0,0) \in D \end{cases}$$

点睛: 这就是“挖洞法”——奇点把区域挖掉, 沿小洞的积分反而最好算。本题的被积式正是极角微分 $d\theta$, 绕原点一圈积累 2π 。

第 17 题

【考点】曲线积分 · 路径无关性 · 改走简单路径

【题目】计算第二类线积分 $\int_L y e^{y^2} dx + (x e^{y^2} + 2xy^2 e^{y^2}) dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的一段弧。

【详解】

先验证路径无关:

$$P = y e^{y^2}, \quad Q = x e^{y^2} + 2xy^2 e^{y^2}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{y^2} + 2y^2 e^{y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{y^2} + 2y^2 e^{y^2}$$

两者相等, 故积分与路径无关, 可以改走从 O 到 A 的直线段 $y = x$ 。

计算 ($y = x, dy = dx$):

$$\int_0^A = \int_0^1 [xe^{x^2} + (xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2})] dx = \int_0^1 \underset{\tilde{I}_1}{2xe^{x^2}} dx + \int_0^1 \underset{\tilde{I}_2}{2x^3e^{x^2}} dx$$

$$I_1 = [e^{x^2}]_0^1 = e - 1$$

$$I_2 \stackrel{u=x^2}{=} \int_0^1 u e^u du = [(u-1)e^u]_0^1 = 0 - (-1) = 1$$

结论: $\int_L = I_1 + I_2 = (e-1) + 1 = e$

答案: e

注: 也可改走折线 $O(0,0) \rightarrow B(1,0) \rightarrow A(1,1)$: OB 上 $y=0, dy=0$, 积分为 0; BA 上 $dx=0$, 积分 $\int_0^1 (e^{y^2} + 2y^2e^{y^2})dy$, 用分部积分同样得 e 。

【答案】 e

第 18 题

【考点】微分方程 · 全微分方程 · 凑原函数

【题目】求解方程 $(5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy = 0$ 的通解。

【详解】

判别全微分:

$$P = 5x^4 + 3xy^2 - y^3, \quad Q = 3x^2y - 3xy^2 + y^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy - 3y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy - 3y^2$$

两者相等, 故为全微分方程, 存在原函数 U 使 $dU = P dx + Q dy$ 。

求原函数 (取起点 $(0,0)$, 走折线):

$$U(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} P dx + Q dy$$

- 沿 x 轴 $(0,0) \rightarrow (x,0)$: $y=0, dy=0$

$$\int_0^x 5t^4 dt = x^5$$

- 沿竖直线 $(x,0) \rightarrow (x,y)$: $dx=0$

$$\int_0^y (3x^2t - 3xt^2 + t^2)dt = \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3$$

$$U(x, y) = x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3$$

通解:

$$x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3 = C$$

注: 折线法的关键在于走平行于坐标轴的折线, 使每段上只有一个变量在变 (x 轴上 $dy = 0$, 竖直段上 $dx = 0$), 这样每段都是一元积分。

第 19 题

【考点】曲线积分 · 格林公式 · 变力做功

【题目】设平面曲线 L 是从点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi, \pi)$ 的半圆弧, 试求该平面内一质点在变力 $\vec{F} = (e^x \sin y - 4y)\vec{i} + (e^x \cos y - 1)\vec{j}$ 作用下, 沿圆弧 L 从 O 移动到 A 所做的功。

【详解】

物理意义: 变力做功 $W = \int_L P dx + Q dy$, 其中

$$P = e^x \sin y - 4y, \quad Q = e^x \cos y - 1$$

补线成闭: 补上有向线段 AO (从 A 回到 O), 与半圆弧 L 围成半圆区域 D , 闭曲线 $L + AO$ 是负向 (顺时针)。

用格林公式:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - (e^x \cos y - 4) = 4$$

$$\oint_{L+AO} = \iint_D (-4) dA = -4 \cdot |D|$$

半圆以 OA 为直径, 直径长 $\sqrt{\pi^2 + \pi^2} = \sqrt{2}\pi$, 半径 $\frac{\sqrt{2}\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$,

$$|D| = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi^3}{4}$$

故 $\oint_{L+AO} = -4 \cdot \frac{\pi^3}{4} = -\pi^3$ 。

减去补线段的贡献: 线段 AO 在直线 $y = x$ 上, x 从 π 到 0 ,

$$\begin{aligned} \int_{AO} &= \int_{\pi}^0 [(e^x \sin x - 4x) + (e^x \cos x - 1)] dx \\ \int_0^{\pi} e^x \sin x dx &= \left[\frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{e^{\pi} + 1}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = \left[\frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} \right]_0^{\pi} = -\frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

两项相消, 故

$$\int_{AO} = -\int_0^{\pi} (-4x - 1)dx = 4 \cdot \frac{\pi^2}{2} + \pi = 2\pi^2 + \pi$$

结论:

$$W = \int_L = \oint_{L+AO} - \int_{AO} = -\pi^3 - (2\pi^2 + \pi) = -\pi^3 - 2\pi^2 - \pi$$

答案: $-\pi^3 - 2\pi^2 - \pi$

【答案】 $-\pi^3 - 2\pi^2 - \pi$

第 20 题

【考点】微分方程 · 由线积分性质反推 · 欧拉型方程

【题目】设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(1) = f'(1) = 1$; 且 $\oint_L \left[\frac{y^2}{x} + xf\left(\frac{y}{x}\right) \right] dx + \left[y - xf'\left(\frac{y}{x}\right) \right] dy = 0$, 其中 L 是右半平面 $x > 0$ 内任一光滑封闭曲线, 求 $f(x)$ 。

【详解】

把条件翻译成偏导等式: 闭曲线积分恒为零 $\Leftrightarrow$ 积分与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 。

$$P = \frac{y^2}{x} + xf\left(\frac{y}{x}\right), \quad Q = y - xf'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{x} + x \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2y}{x} + f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\left[f'\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot f''\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \right] = -f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} f''\left(\frac{y}{x}\right)$$

令两者相等:

$$\frac{2y}{x} + f'\left(\frac{y}{x}\right) = -f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} f''\left(\frac{y}{x}\right)$$

换元: 设 $t = \frac{y}{x}$, 整理得

$$t f''(t) - 2f'(t) = 2t \quad \Rightarrow \quad f''(t) - \frac{2}{t} f'(t) = 2$$

降阶: 令 $u = f'(t)$, 得到一阶线性方程 $u' - \frac{2}{t}u = 2$ 。

积分因子 $e^{\int -\frac{2}{t}dt} = t^{-2}$;

$$(u t^{-2})' = 2t^{-2} \Rightarrow u t^{-2} = -\frac{2}{t} + C_1 \Rightarrow u = -2t + C_1 t^2$$

即 $f'(t) = -2t + C_1 t^2$ 。由 $f'(1) = 1$: $-2 + C_1 = 1$, 得 $C_1 = 3$ 。

再积分:

$$f(t) = \int (-2t + 3t^2)dt = -t^2 + t^3 + C_2$$

由 $f(1) = 1$: $-1 + 1 + C_2 = 1$, 得 $C_2 = 1$ 。

答案: $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

【答案】 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

第 21 题

【考点】曲面积分 · 第二类曲面积分 · 分面投影

【题目】计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z \, dxdy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分。

【详解】

分面: Σ 由上下两片组成

$$\Sigma_1: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ (上侧)}, \quad \Sigma_2: z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ (下侧)}$$

两者在 xOy 面的投影都是 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ (第一象限的 $\frac{1}{4}$ 圆)。

化为二重积分 (第二类曲面积分 $\iint z \, dxdy$, 上侧取正、下侧取负):

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z \, dxdy &= \iint_{\Sigma_1} z \, dxdy + \iint_{\Sigma_2} z \, dxdy \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dxdy + \iint_{D_{xy}} (-\sqrt{1 - x^2 - y^2}) \cdot (-1) \, dxdy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dxdy \end{aligned}$$

极坐标: D_{xy} 对应 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $r \in [0, 1]$:

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \cdot r \, dr = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$$

(其中 $\int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr = \left[-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$)

答案: $\frac{\pi}{3}$

【答案】 $\frac{\pi}{3}$

第 22 题

【考点】曲面积分 · 高斯公式 · 补面法

【题目】计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dxdy$, 其中 Σ 是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 介于平面 $z = 0$ 与 $z = 4$ 之间的部分的下侧。

【详解】

认清被积式: $\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy$, 其中

$$P = z^2 + x, \quad Q = 0, \quad R = -z$$

补面用高斯: Σ 是下侧 (不封闭), 补上平面 $\Sigma_1: z = 4$ 的上侧, 则 $\Sigma + \Sigma_1$ 围成闭区域 Ω (取外法向)。

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 0 + (-1) = 0$$

故由高斯公式:

$$\iint_{\Sigma + \Sigma_1} = \iiint_{\Omega} 0 dV = 0 \Rightarrow \iint_{\Sigma} = - \iint_{\Sigma_1}$$

算补面 Σ_1 的积分: Σ_1 上 $z = 4$ (常数),

- $dydz$ 项: 曲面是水平面, 在 yOz 面投影退化为线段, 故 $\iint_{\Sigma_1} (z^2 + x) dydz = 0$
- $dxdy$ 项: 上侧取正, 投影区域 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 4$

$$\iint_{\Sigma_1} -z dxdy = - \iint_{D_{xy}} 4 dxdy = -4 \cdot \pi \cdot 2^2 = -16\pi$$

结论:

$$\iint_{\Sigma} = - \iint_{\Sigma_1} = -(-16\pi) = 16\pi$$

答案: 16π

点睛: 本题散度恰为 0, 所以补面后闭曲面积分为零, 原积分直接等于补面积分的相反数——散度为 0 的向量场, 穿过任何闭曲面的通量为零, 是高斯公式里最好用的一类。

【答案】 16π

第 23 题

【考点】曲面积分 · 第一类曲面积分 · 对称性与形心

【题目】计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$ ，其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 。

【详解】

先化简被积函数：曲面方程是 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ，即 $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ （球心 $(0, 0, 1)$ 、半径 1）。在 Σ 上恒有 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ，代入得

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_{\Sigma} 2z dS$$

方法一：对称性（推荐）

Σ 关于平面 $z = 1$ 对称，故 $\iint_{\Sigma} (z - 1) dS = 0$ ，于是

$$\iint_{\Sigma} 2z dS = 2 \iint_{\Sigma} [(z - 1) + 1] dS = 2 \iint_{\Sigma} 1 dS = 2 \cdot |\Sigma| = 2 \cdot 4\pi = 8\pi$$

（球面半径 1，表面积 $4\pi R^2 = 4\pi$ ）

方法二：形心公式

$$\iint_{\Sigma} z dS = \bar{z} \cdot |\Sigma| = 1 \cdot 4\pi = 4\pi$$

故原式 $= 2 \cdot 4\pi = 8\pi$ 。

答案： 8π

点睛：第一类（对面积的）曲面积分可以把曲面方程代入被积函数化简——因为积分变量在曲面上满足该关系。这一点与第一类曲线积分类似，但要注意与第二类积分区分开。

【答案】 8π

第 24 题

【考点】曲线积分 · 空间曲线积分 · 参数方程

【题目】计算曲线积分 $I = \oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ ，其中 L 为曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases} (z \geq 0)$ ，从 z 轴正向看取逆时针方向。

【详解】

求参数方程：由 $x^2 + y^2 = 2x$ 得 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ ，是母线平行于 z 轴的圆柱面。

代入球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$: $2x + z^2 = 4$, 即 $z^2 = 4 - 2x$ 。

取参数 θ 使 $x = 1 + \cos\theta$, $y = \sin\theta$ ($\theta: 0 \rightarrow 2\pi$), 则

$$z^2 = 4 - 2(1 + \cos\theta) = 2 - 2\cos\theta = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

由 $z \geq 0$ 得 $z = 2\sin\frac{\theta}{2}$ 。

$$x' = -\sin\theta, \quad y' = \cos\theta, \quad z' = \cos\frac{\theta}{2}$$

代入积分:

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\sin^2\theta \cdot (-\sin\theta) + 4\sin^2\frac{\theta}{2} \cdot \cos\theta + (1 + \cos\theta)^2 \cdot \cos\frac{\theta}{2} \right] d\theta$$

第一项: $\int_0^{2\pi} -\sin^3\theta d\theta = 0$

第二项 (用 $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$):

$$4 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos\theta}{2} \cos\theta d\theta = 2 \int_0^{2\pi} (\cos\theta - \cos^2\theta) d\theta = 2(0 - \pi) = -2\pi$$

第三项 (用 $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$):

$$\int_0^{2\pi} 4\cos^4\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} d\theta \stackrel{\varphi=\theta/2}{=} 8 \int_0^{\pi} \cos^5\varphi d\varphi = 0$$

结论: $I = 0 + (-2\pi) + 0 = -2\pi$

答案: -2π

【答案】 -2π

第 25 题

【考点】 曲线积分 · 第一类曲线积分 · 质心

【题目】 求八分之一球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) 的边界曲线的质心 (设密度为 1)。

【详解】

认清边界: 八分之一球面的边界由三段 $\frac{1}{4}$ 圆弧组成, 分别在三个坐标面上:

$$l_1: x^2 + y^2 = R^2 (z = 0), \quad l_2: y^2 + z^2 = R^2 (x = 0), \quad l_3: x^2 + z^2 = R^2 (y = 0)$$

记 $L = l_1 + l_2 + l_3$ 。

质心公式:

$$\bar{x} = \frac{\oint_L x \rho ds}{\oint_L \rho ds} = \frac{\oint_L x ds}{\oint_L ds}$$

分母 (总弧长): 每段是 $\frac{1}{4}$ 圆周, 弧长 $\frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}$,

$$\oint_L ds = 3 \cdot \frac{\pi R}{2} = \frac{3\pi R}{2}$$

分子: - 在 l_1 ($z=0$) 上, 取 $x = R\cos\theta$, $ds = R d\theta$, $\theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$:

$$\int_{l_1} x ds = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = R^2$$

- 在 l_2 ($x=0$) 上: $x \equiv 0$, 积分为 0 - 在 l_3 ($y=0$) 上, 取 $x = R\cos\theta$: 同理得 R^2

$$\oint_L x ds = R^2 + 0 + R^2 = 2R^2$$

质心: 由对称性 $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$,

$$\bar{x} = \frac{2R^2}{\frac{3\pi R}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

答案: $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{4R}{3\pi}$, 即质心为 $(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$

校注: 用 xOy 面上的弧长微元直接算也行——在 l_1 上 $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx$,
则 $\int_0^R x \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R^2$, 结果一致。

【答案】 $\frac{4R}{3\pi}$

第 26 题

【考点】曲面积分 · 第一类曲面积分 · 锥面 · 对称性

【题目】计算 $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$, 其中 Σ 为圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所截的部分。

【详解】

投影区域: 柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 即 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 故

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

用对称性消去两项: Σ 关于 xOz 坐标面对称 ($y \rightarrow -y$ 不变), 而 xy 与 yz 关于 y 是奇函数, 故

$$\iint_{\Sigma} xy \, dS = \iint_{\Sigma} yz \, dS = 0$$

于是

$$\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) \, dS = \iint_{\Sigma} zx \, dS$$

面积微元: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} \, dxdy = \sqrt{2} \, dxdy$$

化为二重积分并转极坐标:

$$\iint_{\Sigma} zx \, dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot x \cdot \sqrt{2} \, dxdy$$

D 的极坐标表示: $r^2 = 2r\cos\theta$, 即 $r = 2\cos\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r \cos\theta \cdot r \cdot r \, dr = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \frac{(2\cos\theta)^4}{4} \, d\theta \\ &= 4\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \, d\theta = 4\sqrt{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \, d\theta = 8\sqrt{2} \cdot \frac{8}{15} = \frac{64\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

(用到 $\int_0^{\pi/2} \cos^5\theta \, d\theta = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{15}$)

答案: $\frac{64\sqrt{2}}{15}$

【答案】 $\frac{64\sqrt{2}}{15}$

第 27 题

【考点】曲面积分 · 第二类曲面积分 · 分面投影

【题目】设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 的外侧, 求曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz \, dxdy$.

【详解】

分面: Σ 由上下两片组成

$$\Sigma_1: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ (上侧)}, \quad \Sigma_2: z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ (下侧)}$$

注意投影区域：因为 Σ 只取 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分，两片在 xOy 面的投影是

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

即第一象限的 $\frac{1}{4}$ 圆（不是整个圆）。

化为二重积分（上侧取正、下侧取负）：

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} x y z \, dxdy &= \iint_{D_{xy}} x y \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dxdy + \iint_{D_{xy}} x y (-\sqrt{1 - x^2 - y^2}) \cdot (-1) \, dxdy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} x y \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dxdy\end{aligned}$$

极坐标（ D_{xy} 对应 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $r \in [0, 1]$ ）：

$$\begin{aligned}&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r \cos\theta \cdot r \sin\theta \cdot \sqrt{1 - r^2} \cdot r \, dr \\ &= 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^1 r^3 \sqrt{1 - r^2} \, dr \right)\end{aligned}$$

前者 $= \frac{1}{2}$ ；后者令 $u = 1 - r^2$ ：

$$\begin{aligned}\int_0^1 r^3 \sqrt{1 - r^2} \, dr &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - u) u^{1/2} \, du = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{2}{15} \\ \iint_{\Sigma} x y z \, dxdy &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

答案： $\frac{2}{15}$

校注：这一步的 θ 上限必须随 $x \geq 0, y \geq 0$ 写 $\frac{\pi}{2}$ 。若误写成 $[0, 2\pi]$ ，则 $\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = 0$ ，会得到 0（与第一象限外的部分正负相消）——结果就错了。

【答案】 $\frac{2}{15}$