

2027 考研数学 (二) 模拟试卷 (经纬数学·第七套)

考试时间 180 分钟 满分 150 分

一、选择题: 1 ~ 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分。下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的。

第 01 题

设可微函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\sin(xy) + z^2 = x + 2z$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$

- A. $\frac{1-(x+y)\cos(xy)}{2(z-1)}$ B. $\frac{(x+y)\cos(xy)-1}{2(z-1)}$
C. $\frac{1-(x+y)\sin(xy)}{2(1-z)}$ D. $\frac{1+(x+y)\cos(xy)}{2(z-1)}$

第 02 题

设函数 $f(x) = \int_0^x t(t-1)e^t dt$, 则 $(\quad)$

- A. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点 B. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点 C. $(0,0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
D. $x = 0$ 既不是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

第 03 题

设 y_1, y_2, y_3 是非齐次线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个线性无关解, 则下列组合中是该方程通解的是 $(\quad)$, 其中 c_1, c_2 为任意常数。

- A. $y_2(c_1 + c_2) - c_1y_1 + c_2y_3 + y_1$ B. $y_2(c_1 + c_2) - c_1y_1 - c_2y_3 + y_1 + y_2$
C. $y_2(c_1 + c_2) - c_1y_1 - c_2y_3 + \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_3$ D. $y_2(c_1 + c_2) - c_1y_1 - c_2y_3 + \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_3$

第 04 题

设 $f(x), g(x)$ 当 $x \rightarrow 0$ 时均为无穷小, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$, 则下列结论必定成立的是 $(\quad)$

- A. $f(x) - g(x) = o(g(x))$ B. $f(x) + g(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小 C. $f^2(x)$ 与 $g^2(x)$ 是同阶无穷小 D. $f(x)g(x)$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的二阶无穷小

第 05 题

设 $f(x, y)$ 连续, 则 $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x, y) dy = (\quad)$

- A. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx$

B. $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx$

C. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$

D. $2 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$

第 06 题

一口半径为 R ($R > 0$, 单位: m) 的圆柱形蓄水池, 池内水深 6 m。现将池中的水全部抽至池口上方 2 m 处的水箱, 设水的密度为 ρ , 重力加速度为 g , 则克服重力所做的功为 ()

A. $\int_0^6 \rho g \pi R^2 (8-x) dx$ B. $\int_0^6 \rho g \pi R^2 (6-x) dx$

C. $\int_0^8 \rho g \pi R^2 (8-x) dx$ D. $\int_2^6 \rho g \pi R^2 x dx$

第 07 题

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 给出下列四个条件:

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{\ln(1+2x)}$ 存在;

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)-f(0)}{x}$ 存在;

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right]$ 存在;

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)-\frac{x}{1+x^2}}{x}$ 存在.

其中能得出 “ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导” 的条件个数是 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

第 08 题

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 有两个正特征值和一个负特征值, 则 ()

A. $a > b^2$ B. $a > 1$ 且 $|b| < 1$ C. $a > b^2$ 且 $b \neq 0$ D. $a > 2|b|$

第 09 题

已知齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有基础解系

$$\xi_1 = (1, 1, -1, 1)^T, \quad \xi_2 = (2, 3, 1, 0)^T, \quad \xi_3 = (1, 2, 2, 1)^T,$$

则下列向量中, 是该方程组解的是 ()

A. $(1, 2, -2, 0)^T$ B. $(2, 1, -1, 1)^T$

C. $(2, 3, 1, 2)^T$ D. $(2, 1, 0, 0)^T$

第 10 题

设 A, B 均为 n 阶矩阵 ($n \geq 2$)，则下列命题中正确的个数是 ()

- ① 若 $AB = O$ ，则 $r(A) + r(B) \leq n$;
- ② 若 A 可逆，则 $r(AB) = r(B)$;
- ③ 若 $r(AB) = n$ ，则 $r(A) = r(B) = n$;
- ④ 若 $r(A) = r(B)$ ，则 A 与 B 等价.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题：11 ~ 16 小题，每小题 5 分，共 30 分。

第 11 题

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

第 12 题

曲线 $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

第 13 题

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

第 14 题

微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$ 满足 $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ 的特解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

第 15 题

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

第 16 题

设列向量 $\alpha = (1, 2, -1)^T$ ，矩阵 $A = \alpha\alpha^T$ ，则 $|A - 2E| = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题：17 ~ 22 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

第 17 题 (10 分)

计算定积分 $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

第 18 题 (12 分)

设曲线 $y = 2x - x^2$ 与 x 轴围成平面图形 D . (I) 求 D 的面积 S ; (II) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

第 19 题 (12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. 证明: (I) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$; (II) 存在两个不同的点 $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta_1) \cdot f'(\eta_2) = 1$.

第 20 题 (12 分)

求函数 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 在闭区域 $D: |x| + |y| \leq 2$ 上的最大值与最小值.

第 21 题 (12 分)

计算二重积分 $I = \iint_D |x^2 + y^2 - 2y| dx dy$, 其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

第 22 题 (12 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. 已知 A 有 3 个线性无关的特征向量, 且 $\lambda = 2$ 是 A 的二重特征值.

(1) 求 x, y ;

(2) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.