

2027 考研数学 (二) 模拟试卷 (经纬数学·第七套) · 详解

一、选择题

第 01 题 答案 A

设 $F(x, y, z) = \sin(xy) + z^2 - x - 2z$, 则

$$F_x = y\cos(xy) - 1, \quad F_y = x\cos(xy), \quad F_z = 2z - 2.$$

由隐函数求导公式:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{y\cos(xy) - 1}{2z - 2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{x\cos(xy)}{2z - 2}.$$

相加:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - (x + y)\cos(xy)}{2(z - 1)}.$$

选 A. B 是分子差一个负号; C 把 $\cos$ 换成 $\sin$ 且分母错; D 分子多加了 $x + y\cos(xy)$ 中的符号.

第 02 题 答案 A

$f'(x) = x(x-1)e^x$, 故 $f'(0) = 0$; $f''(x) = (x^2 + x - 1)e^x$, 故 $f''(0) = -1 < 0$. 由极值第二充分条件, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 选 A. 另: 拐点要求 f'' 在该点变号, $f''(0) = -1 \neq 0$, $(0,0)$ 不是拐点, 排除 C; D 与 A 矛盾.

第 03 题 答案 C

判定定理 (两步走). 设 $L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y$, 则 $L[y_i] = f$ ($i = 1, 2, 3$).

- ① 是不是解: $L[\sum k_i y_i] = (\sum k_i)f$, 故 $\sum k_i y_i$ 是原方程的解 $\Leftrightarrow$ 系数和 $\sum k_i = 1$;
- ② 是不是通解: 二阶方程的通解含两个独立常数. 记 $u = y_2 - y_1$, $v = y_3 - y_1$ (齐次解, 由三解线性无关知 u, v 无关), 则 $\sum k_i y_i = (\sum k_i)y_1 + k_2 u + k_3 v$. 它是通解 $\Leftrightarrow k_2, k_3$ 能随 c_1, c_2 独立取遍任意实数.

逐项检验 (列出 y_1, y_2, y_3 的系数):

选项	k_1	k_2	k_3	系数和	结论
A	$-c_1 + 1$	$c_1 + c_2$	c_2	$1 + 2c_2$	随 c_2 变, 不是解
B	$-c_1 + 1$	$c_1 + c_2 + 1$	$-c_2$	2	是 $L[y] = 2f$ 的解, 不是

选项	k_1	k_2	k_3	系数和	结论
C	$-c_1 + 1/3$	$c_1 + c_2$	$-c_2 + 2/3$	1	原方程的解 是解; $k_2 = c_1 + c_2, k_3 = -c_2 + 2/3$ 由 $\begin{pmatrix} k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ 给出, 系数矩阵可逆, 故可取遍 $\mathbb{R}^2$, 是通解
D	$-c_1 + 1/3$	$c_1 + c_2$	$-c_2 + 1/3$	2/3	不是原方程的解

选 C.

方法点睛: 这类题不用解微分方程, 只看两个数——**系数和必须为 1** (保证是解)、**系数中要含两个独立参数** (保证是通解). B、D 是典型的“系数和不对”陷阱 (分别是 $L[y] = 2f$ 与 $L[y] = 2/3 f$ 的解); A 的系数和里混进了 c_2 , 只有在 $c_2 = 0$ 时才是解, 更谈不上通解.

第 04 题 答案 C

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{g^2(x)} = c^2 \neq 0,$$

故 $f^2(x)$ 与 $g^2(x)$ 同阶, C 必定成立.

各干扰项均可举反例: - A: 取 $c \neq 1$ (如 $f = 2g$), $f - g = g$ 与 g 同阶而非高阶, 错; - B: 取 $f = -g + g^2$ ($c = -1$), 则 $f + g = g^2 = o(g)$, 不是同阶, 错; - D: “ n 阶无穷小”必须以 x 为基准, f, g 未必是 x 的一阶无穷小 (如 $f = x^2, g = 2x^2$ 时 fg 是四阶), 错.

第 05 题 答案 A

积分区域由 $y = x^2$ (下界) 与 $y = 2 - x^2$ (上界) 围成, 两曲线交于 $(-1, 1), (1, 1)$. 改为 y 型区域需以 $y = 1$ 分界:

- $0 \leq y \leq 1$: x 从左支 $x = -\sqrt{y}$ 到右支 $x = \sqrt{y}$ (此段区域由 $y = x^2$ 两侧控制);
- $1 \leq y \leq 2$: x 从 $x = -\sqrt{2-y}$ 到 $x = \sqrt{2-y}$ (此段由 $y = 2 - x^2$ 控制).

故原式 $= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f dx$, 选 A. (B 的内限混入 y^2 与直线; C 两段上下颠倒; D 忽略了区域的分段且没有奇偶性依据可乘 2.)

第 06 题 答案 A

取深度微元 $[x, x+dx]$ (x 为该层水深, $0 \leq x \leq 6$), 该层水重 $\rho g \pi R^2 dx$, 需提升的高度为 $(6-x)+2=8-x$ (m). 故

$$W = \int_0^6 \rho g \pi R^2 (8-x) dx, \quad **\text{选 A}**.$$

(B 漏掉池口上方 2 m; C 把积分上限错当成提升高度; D 的被积式与区间均不对应微元关系.)

第 07 题 答案 B (仅①④)

本题命题手法对照 2025 年真题第 7 题: 四个条件表面上都是“某个极限存在”, 实质分别踩在导数定义的不同门槛上——等价无穷小替换、单侧信息、归结原则 (点列 vs 整体)、极限四则运算. 逐条判定:

① 正确. 由 $\ln(1+2x) \sim 2x$ ($x \rightarrow 0$, 双向等价), 且 $f(x) - f(0) \rightarrow 0$ (连续性),

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\ln(1+2x)} = A \text{ 存在} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\ln(1+2x)} \cdot \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2A,$$

即 $f'(0) = 2A$ 存在. (考等价无穷小替换: 分母换成同阶量不改变“是否存在”的结论.)

② 错误. $x^2 \geq 0$, 条件只含 f 在右侧的信息: 令 $t = x^2$, 则 $\frac{f(x^2) - f(0)}{x} = \frac{f(t) - f(0)}{\sqrt{t}}$ ($t > 0$), 极限存在只说明 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{\sqrt{t}}$ 存在, 完全控制不到左侧. 反例: $f(x) = |x|$ (连续, $f(0) = 0$), $\frac{f(x^2) - f(0)}{x} = \frac{x^2}{x} = x \rightarrow 0$ 存在, 但 f 在 $x = 0$ 不可导. (考“单侧信息不足”——与真题第 7 题中“③ $\frac{|f(x)|}{x}$ 型条件”同源.)

③ 错误. 条件只沿点列 $x_n = \frac{1}{n}$ 成立. 由归结原则 (海涅定理), “整列极限存在 $\Rightarrow$ 任意点列极限存在且相等”, 但一个点列的极限存在推不出整体极限存在. 反例: $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ (补充定义 $f(0) = 0$, 连续), 则 $n \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right] = \sin n\pi = 0$ 存在; 但 $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin \frac{\pi}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 无极限, $f'(0)$ 不存在. (考归结原则的必要不充分性.)

④ 正确. 设该极限为 A , 则由极限的四则运算法则:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0) - \frac{x}{1+x^2}}{x} + \frac{1}{1+x^2} \right] = A + 1,$$

存在, 即 $f'(0) = A + 1$. (考“收敛 + 收敛 = 收敛”的拆分; 对照 2025 真题第 7 题④的处理思想.)

综上，能得出可导的是①④，共 2 个，选 B.

命题注记（给老板）：2025 真题第 7 题官方答案 B（②④），但严格数学分析（保号性逼出 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x} = 0$ ）支持四个条件全部成立，是当年著名的争议题，多家机构评析认为“四个全对”正是其“奇异之美”。本题沿用“四条件判个数”的骨架与“每个条件各踩一个知识点”的分工（等价无穷小 / 单双侧 / 归结原则 / 四则拆分），但答案取平凡的“2 个”，四条判定本身无争议。

第 08 题 答案 A

A 是实对称矩阵，特征值符号可用准标准形判定.

$$|\lambda E - A| = (\lambda + 1)[\lambda^2 - (1 + a)\lambda + (a - b^2)].$$

二阶块 $\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & a \end{pmatrix}$ 的两个特征值 $\lambda_{1,2}$ 满足

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 + a > 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 = a - b^2.$$

要二阶块两特征值均正，需且只需 $a - b^2 > 0$ （此时和、积均正，两根必全正）；再加上第三个特征值 $-1 < 0$ ，恰为“两正一负”。故 $a > b^2$ ，选 A.（C 多加了 $b \neq 0$ 的多余条件—— $b = 0$ 时 $a > 0$ 同样成立；B、D 均非充要条件.）

第 09 题 答案 C

齐次方程组的解集合就是基础解系的张成空间，即判断选项中哪个向量能由 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性表示.

方法一（凑组合，最快）. 直接观察

$$\xi_1 + \xi_3 = (1 + 1, 1 + 2, -1 + 2, 1 + 1)^T = (2, 3, 1, 2)^T,$$

恰为选项 C，故 C 是解，选 C.

方法二（正交补，可逐一排除）. 基础解系含 3 个 4 维向量，故解空间维数为 3， $r(A) = 4 - 3 = 1$ ， A 的行向量共线. 求出与三个 ξ_i 都正交的非零向量 $\eta = (a, b, c, d)^T$ ：

$$\begin{cases} a + b - c + d = 0, \\ 2a + 3b + c = 0, \\ a + 2b + 2c + d = 0, \end{cases}$$

取 $a = 4$ 解得 $b = -3, c = 1, d = 0$ ，即 $\eta = (4, -3, 1, 0)^T$. 检验 $4\beta_1 - 3\beta_2 + \beta_3$ ：

选项	计算	结论
A (1,2,-2,0)	$4 - 6 - 2 = -4$	不是解
B (2,1,-1,1)	$8 - 3 - 1 = 4$	不是解
C (2,3,1,2)	$8 - 9 + 1 = 0$	是解
D (2,1,0,0)	$8 - 3 + 0 = 5$	不是解

方法点睛：解向量必与 A 的行向量正交——这是判别“某向量是不是解”最省事的办法，尤其当 $r(A)$ 很小时（本题 $r = 1$ ，只需一次点乘）。注意别把基础解系向量本身当成选项去找，选项通常是它们的组合（本题 C 恰为 $\xi_1 + \xi_3$ ）。

第 10 题 答案 D（四个命题全部正确）

① $AB = O \Rightarrow B$ 的列都是 $Ax = 0$ 的解 $\Rightarrow r(A) + r(B) \leq n$ $\checkmark$ ② A 可逆， $r(AB) = r(A^{-1}AB) = r(B)$ $\checkmark$ ③ $n = r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} \leq n \Rightarrow r(A) = r(B) = n$ $\checkmark$ ④ 同型矩阵等价 $\Leftrightarrow$ 秩相等，故 A 与 B 等价 $\checkmark$

四个全对，选 D。> 命题注记：本题与第 7 题呼应 2025 真题“答案全对”的奇异设计——第 7 题严格分析下也是四个条件全成立。考生面对“④这么显然也对”时容易怀疑自己，这是本题的训练价值：判定题按定义逐条验，不预设答案分布。

二、填空题

第 11 题 答案 $\frac{\pi}{12}$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4} \right),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{12}.$$

（用 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$ 。）

第 12 题 答案 $y = x + \frac{1}{e}$

$x \rightarrow +\infty$ 时 $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 1$;

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{ex} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{ex} = \frac{1}{e}.$$

（ $x \rightarrow -\infty$ 同理得同一渐近线；另曲线有垂直渐近线 $x = -\frac{1}{e}$ ，但题目只问斜渐近线。）

第 13 题 答案 $\ln(1 + \sqrt{2})$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + (k/n)^2}} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = [\ln(x + \sqrt{1 + x^2})]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

第 14 题 答案 $y = 2e^{2x} - 2(x+1)e^x$

齐次特征方程 $(r-1)(r-2) = 0$ ； e^x 对应单根 $r = 1$ ，设 $y^* = Axe^x$ （ A 待定）代入得 $A = -2$ 。通解 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2xe^x$ 。代入 $y(0) = 0$ ： $C_1 + C_2 = 0$ ； $y'(0) = 0$ ： $C_1 + 2C_2 - 2 = 0$ ，解得 $C_2 = 2$ ， $C_1 = -2$ 。故 $y = 2e^{2x} - 2(x+1)e^x$ 。（已用 sympy 验证满足方程与初值。）

第 15 题 答案 2

第一步：由规范形读出惯性指数。 规范形 $y_1^2 + y_2^2$ 说明：秩为 2、正惯性指数 $p = 2$ 、负惯性指数 $q = 0$ 。即二次型矩阵 A 的特征值为两个正数与一个 0，从而 $\det A = 0$ 且 A 半正定。

第二步：写出矩阵并求行列式。

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad \det A = a(a^2 - 1) - (a + 1) - (a + 1) = a^3 - 3a - 2 \\ = (a - 2)(a + 1)^2.$$

由 $\det A = 0$ 得 $a = 2$ 或 $a = -1$ 。

第三步：用惯性指数定夺。

- $a = 2$: $\operatorname{tr} A = 6$ ，二阶主子式之和 $= 3 + 3 + 3 = 9$ ，特征多项式 $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda - 3)^2$ ，特征值为 0, 3, 3，规范形确为 $y_1^2 + y_2^2$ ✓
- $a = -1$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ，三行共线， $r(A) = 1$ ， $\operatorname{tr} = -3$ ，特征值为 $-3, 0, 0$ ，规范形为 $-y_1^2$ ✗

答案： $a = 2$ 。

方法点睛：“规范形 $\rightarrow$ 特征值符号 $\rightarrow \det = 0$ ”是这类题的标准入口，但 $\det = 0$ 只是必要条件，必须再验证惯性指数才能排除伪根——本题 $a = -1$ 就是被这一步筛掉的（它秩只有 1）。

第 16 题 答案 16

$A = \alpha\alpha^T$ 满足 $A^2 = (\alpha^T\alpha)A$ ，特征值为 $\alpha^T\alpha = 6, 0, 0$ 。

$$|A - 2E| = (6 - 2)(0 - 2)(0 - 2) = 16.$$

三、解答题

第 17 题 $(I = \frac{\pi^2}{4})$

由 $x \rightarrow \pi - x$ 换元：

$$I = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin x}{1 + \cos^2 x} dx,$$

两式相加：

$$2I = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_0^\pi \frac{-d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = -\pi [\arctan(\cos x)]_0^\pi = -\pi \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

故 $I = \frac{\pi^2}{4}$.

第 18 题 $(S = \frac{4}{3}, V = \frac{8\pi}{3})$

曲线 $y = 2x - x^2$ 与 x 轴交于 $x = 0, 2$.

$$(I) S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

(II) 用柱壳法 (竖条绕 y 轴):

$$V = \int_0^2 2\pi x (2x - x^2) dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = 2\pi \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi \left(\frac{16}{3} - 4 \right) = \frac{8\pi}{3}.$$

第 19 题 (介值定理 + 两次拉格朗日)

(I) 令 $g(x) = f(x) + x - 1$, 则 g 在 $[0, 1]$ 连续, $g(0) = -1 < 0$, $g(1) = 1 > 0$. 由零点定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使 $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = 1 - \xi$.

(II) 在 $[0, \xi]$ 与 $[\xi, 1]$ 上分别用拉格朗日中值定理 (f 在两段上均满足条件): 存在 $\eta_1 \in (0, \xi)$ 与 $\eta_2 \in (\xi, 1)$, 使

$$f'(\eta_1) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{1 - \xi}{\xi}, \quad f'(\eta_2) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{\xi}{1 - \xi}.$$

由 $\xi \in (0, 1)$ 知 $\eta_1 < \eta_2$ (互异), 且

$$f'(\eta_1)f'(\eta_2) = \frac{1 - \xi}{\xi} \cdot \frac{\xi}{1 - \xi} = 1. \quad \blacksquare$$

第 20 题 (最大值 8, 最小值 -8)

内部: 解 $\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(0, 0)$, $(1, 1)$. $A = z_{xx} = 6x$, $B = z_{xy} = -3$, $C = z_{yy} = 6y$.
- $(1, 1)$: $AC - B^2 = 36 - 9 > 0$, $A = 6 > 0$, 极小值 $z(1, 1) = -1$;
- $(0, 0)$: $AC - B^2 = -9 < 0$, 非极值, $z(0, 0) = 0$.

边界 (四段, 均代入化为一元):
- $-x + y = 2$ ($0 \leq x \leq 2$): $z = 9x^2 - 18x + 8$, 最大 $z(0) = z(2) = 8$, 最小 $z(1) = -1$;
- $-x + y = 2$ ($-2 \leq x \leq 0$): $z = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 8$, $z' > 0$ 单调增, 最大 $z(0) = 8$, 最小 $z(-2) = -8$ (点 $(-2, 0)$);
- $-x - y = 2$ ($0 \leq x \leq 2$): $z = 2x^3 - 9x^2 + 18x - 8$, 最大 8 (端点 $(2, 0)$), 最小 -8;
- $-x + y = -2$ ($-2 \leq x \leq 0$): $z = -3x^2 - 6x - 8$, 最大 $z(-1) = -5$, 最小 -8 (点 $(0, -2)$).

(以上各段最值均已用 sympy 的 maximum/minimum 逐段复核.)

比较: $z_{\max} = 8$ (在 $(2, 0)$ 与 $(0, 2)$), $z_{\min} = -8$ (在 $(-2, 0)$ 与 $(0, -2)$). (内部极小值 -1 不及边界最小值, 最大值不在驻点取得——闭区域最值必须内外兼顾.)

第 21 题 $(I = 9\pi)$

极坐标下 $x^2 + y^2 - 2y = r^2 - 2r\sin\theta$, $D: r \leq 2$, 被积函数含绝对值, 以圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ (即 $r = 2\sin\theta$) 为分界线.

$\theta \in (0, \pi)$ (上半平面): $r < 2\sin\theta$ 时 $r^2 - 2r\sin\theta < 0$, 取负号; $r > 2\sin\theta$ 时取正号:

$$I_1 = \int_0^\pi \left[\int_0^{2\sin\theta} (2r\sin\theta - r^2) r dr + \int_{2\sin\theta}^2 (r^2 - 2r\sin\theta) r dr \right] d\theta.$$

内层积分:

$$\int_0^{2\sin\theta} (2r\sin\theta - r^2) r dr = \frac{4}{3} \sin^4\theta,$$

$$\int_{2\sin\theta}^2 (r^2 - 2r\sin\theta) r dr = \left[\frac{r^4}{4} - \frac{2\sin\theta}{3} r^3 \right]_{2\sin\theta}^2 = 4 - \frac{16}{3} \sin\theta + \frac{4}{3} \sin^4\theta.$$

合并后 θ 向积分:

$$I_1 = \int_0^\pi \left(4 - \frac{16}{3} \sin\theta + \frac{8}{3} \sin^4\theta \right) d\theta = 4\pi - \frac{32}{3} + \frac{8}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = 5\pi - \frac{32}{3}.$$

$\theta \in (\pi, 2\pi)$ (下半平面): $\sin\theta < 0$, $r^2 - 2r\sin\theta = r^2 + 2r|\sin\theta| > 0$ 恒成立, 绝对值直接去掉:

$$I_2 = \int_\pi^{2\pi} \int_0^2 (r^2 - 2r\sin\theta) r dr d\theta = \int_\pi^{2\pi} \left(4 - \frac{16}{3} \sin\theta \right) d\theta = 4\pi + \frac{32}{3}.$$

合计: $I = I_1 + I_2 = 9\pi$. (已用网格数值积分复核: $9\pi \approx 28.2743$ ✓. 易错点: 下半平面误把 $\sin\theta$ 的符号又负一次, 会算出 $9\pi - \frac{64}{3}$ ——本卷验算时程序先犯过此错, 靠网格复核抓住.)

第 22 题 $(x = 2, y = -2; P^{-1}AP = \text{diag}(2, 2, 6))$

(1) 求 x, y

由 $\text{tr}A = 1 + 4 + 5 = 10$, 而 $\lambda = 2$ 是二重特征值, 得第三个特征值 $\lambda_3 = 10 - 2 - 2 = 6$, 故特征多项式为

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 6) = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 28\lambda - 24.$$

关键条件: “有 3 个线性无关的特征向量” = A 可对角化, 于是二重特征值 $\lambda = 2$ 的几何重数 = 代数重数 = 2, 即

$$r(A - 2E) = 3 - 2 = 1.$$

而

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ x & 2 & y \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

第三行是第一行的 3 倍，故其秩为 1 当且仅当第二行也是第一行的倍数：\$(x, 2, y) = k(-1, -1, 1)\$。由第二个分量 \$2 = -k\$ 得 \$k = -2\$，于是

$$x = 2, \quad y = -2.$$

(校验：二阶主子式之和 \$= (20 + 3y) + 8 + (4 + x) = 32 + x + 3y = 28\$，与特征多项式系数一致 \$\checkmark\$)

(2) 求 \$P\$

此时 \$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}\$.

- \$\lambda = 2\$: \$(A - 2E)X = \mathbf{0}\$ 即 \$-x_1 - x_2 + x_3 = 0\$，取两组无关解

$$\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, 1)^T.$$

- \$\lambda = 6\$: \$A - 6E = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}\$，解得 \$\alpha_3 = (1, -2, 3)^T\$。 (校验：\$A\alpha_3 = (1 + 2 + 3, 2 - 8 - 6, -3 + 6 + 15)^T = (6, -12, 18)^T = 6\alpha_3 \checkmark\$)

取

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det P = 4 \neq 0,$$

则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

易错点：只用 \$\det A = 24\$ (或二阶主子式之和 \$= 28\$) 只能得到一个方程 \$x + 3y = -4\$，两个未知数解不出来——“有 3 个线性无关特征向量”这个条件不是摆设，它等价于 \$r(A - 2E) = 1\$，这才是定解的关键。若漏掉它，就会卡在 \$x + 3y = -4\$ 上无从下手。